حلول التمارين التطبيقية لدرس الدوال العددية

فهرس حلول التمارين

حل التمرين 1: 3
حل التمرين 2: 3
حل التمرين 3: 4
حل التمرين 4: 5
حل التمرين 5: 6
حل التمرين 6: 8
حل التمرين 7: 8
حل التمرين 8: 9
حل التمرين 9: 10
حل التمرين 10: 11
حل التمرين 11: 12
حل التمرين 12: 13
حل التمرين 13: 15
حل التمرين 14: 15
حل التمرين 15: 16
حل التمرين 16: 17
حل التمرين 17: 18
حل التمرين 18: 19
حل التمرين 19: 20
حل التمرين 20: 21
حل التمرين 21: 23
حل التمرين 22: 24
حل التمرين 23: 24
حل التمرين 24: 25
حل التمرين 25: 25

Latreche MIFA

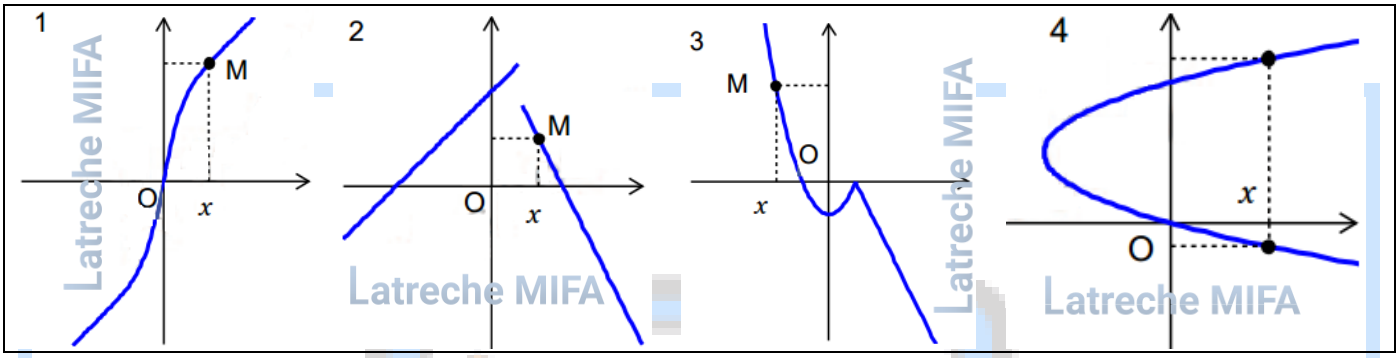
حل التمرين 26: 26
حل التمرين 27: 27
حل التمرين 28: 27
حل التمرين 29: 28
حل التمرين 30: 30
حل التمرين 31: 31

Latreche MIFA

حل التمرين 1:

❖ الأشكال 1، 2 و3 تمثل دوال عددية وذلك لأن كل نقطة M من البيان لها فاصلة وحيدة x.

❖ الشكل 4 لا يمثل دالة وذلك لأنه من أجل على الأقل عدد حقيقي x ، يوجد على البيان نقطتين سابقتها x.



حل التمرين 2:

لدينا الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

1) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $x^2\geq 0$ ومنه $x^2+1\geq 1$ أي $x^2+1\neq 0$ ومنه فإن: $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

معرفة من أجل كل عدد حقيقي x. ومنه فإن: f معرفة على $\mathbb{R}$.

2)

❖ $f(3)=\dfrac{1}{3^2+1}=\dfrac{1}{10}$ ومنه صورة 3 بالدالة f هي: $\boxed{f(3)=\dfrac{1}{10}}$.

❖ $f(0)=\dfrac{1}{0^2+1}=1$ ومنه صورة 0 بالدالة f هي: $\boxed{f(0)=1}$.

❖ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\dfrac{1}{\frac{1}{4}+1}=\dfrac{1}{\frac{5}{4}}=\dfrac{4}{5}$ ومنه صورة $\dfrac{1}{2}$ بالدالة f هي: $\boxed{f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{5}}$.

❖ $f(-3)=\dfrac{1}{(-3)^2+1}=\dfrac{1}{9+1}=\dfrac{1}{10}$ ومنه صورة (-3) بالدالة f هي: $\boxed{f(-3)=\dfrac{1}{10}}$.

3)

❖ البحث عن سوابق 2 بالدالة f يعود لحل المعادلة: $f(x)=2$. ومنه:

$$f(x)=2\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+1}=2\Leftrightarrow 2(x^2+1)=1\Leftrightarrow 2x^2+2=1\Leftrightarrow 2x^2=-1$$

وبما أن $x^2>0$ من أجل كل عدد حقيقي، فإن المعادلة $2x^2=-1$ ليس لها حلول،

ومنه: 2 ليس له سوابق بالدالة f.

❖ البحث عن سوابق 0 بالدالة f يعود لحل المعادلة: $f(x)=0$. ومنه:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow 0\left(x^2+1\right)=1$$

وبما أن $0\left(x^2+1\right)=0$ من أجل كل عدد حقيقي، فإن المعادلة $0\left(x^2+1\right)=1$ ليس لها حلول،

ومنه 0 ليس له سوابق بالدالة f.

❖ البحث عن سوابق $\frac{1}{2}$ بالدالة f يعود لحل المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}$. ومنه:

$$f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+1=2 \Leftrightarrow x^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=1 \quad 1 \quad =-$$

ومنه $\frac{1}{2}$ له سابقتين بالدالة f هما 1 و -1.

حل التمرين 3:

ملاحظة: الأجوبة في هذا التمرين هي قيم تقريبية مأخوذة من الشكل ولا يمكن إعطاؤها بدقة.

1) $f(-3)=(-9)$. $f(0)=(-2)$ $f(2)\approx 0,5$ $f(5)\approx 0,6$

2)

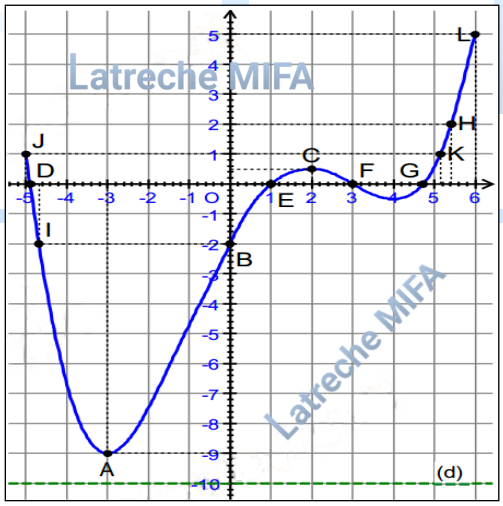
❖ التمثيل البياني للدالة f له 4 نقاط (D, E, F, G) ترتيبها 0. فواصل هذه النقاط هي على الترتيب:
4,7 ; 3 ; 1 ; -4,9. ومنه فإن: 0 له 4 سوابق بالدالة f هي: 4,7 ; 3 ; 1 ; -4,9.

❖ التمثيل البياني للدالة f له نقطة (H) ترتيبها 2. فاصلة هذه النقطة هي: 5,4. ومنه فإن:

2 له سابقة وحيدة بالدالة f هي: 5,4.

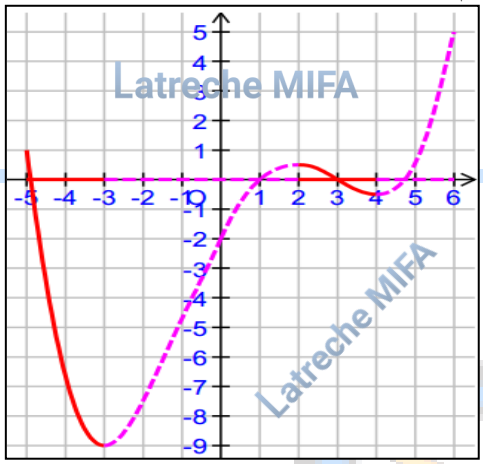
❖ التمثيل البياني للدالة f ليست له أي نقطة ترتيبها (-10). ومنه فإن: (-10) ليس له سوابق بالدالة f.

❖ التمثيل البياني للدالة f له نقطتين (I, B) ترتيبها (-2). فواصل هاتين النقطتين هي على الترتيب:
$(-4,7)$ و0. ومنه فإن: (-2) له سابقتين بالدالة f هي: $(-4,7)$; 0.



حل التمرين 4:

ملاحظة: الأجوبة في هذا التمرين مأخوذة من الشكل، وبالتالي هي قيم تقريبية.



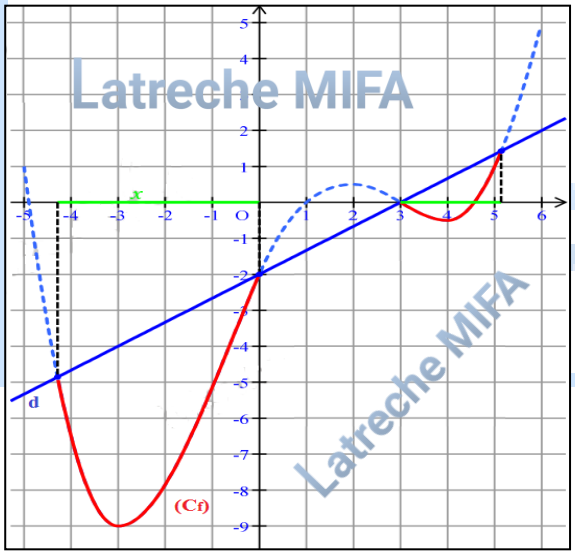
1) الدالة f متناقصة على $[-5;-3]\cup[2;4]$ (القسم الأحمر من التمثيل البياني على الشكل المقابل)، ومتزايدة على $[-3;2]\cup[4;6]$. ومنه جدول تغيراتها يكون كالتالي:

x	-5		-3		2		4		6
f	1	↘	-9	↗	$0,5$	↘	$-0,5$	↗	5

2)

- مجموعة حلول المعادلة $f(x)=1$ هي مجموعة فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=1$، ومنه: $\boxed{f(x)=1\Leftrightarrow S=\{-5\ ;\ 5,2\}}$.
- مجموعة حلول المعادلة $f(x)=-12$ هي مجموعة فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=-12$، وبما أن (C_f) ليس له أي نقطة تقاطع مع المستقيم الذي معادلته $y=-12$ فإن: $\boxed{f(x)=-12\Leftrightarrow S=\varnothing}$.
- مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ هي مجموعة فواصل نقاط (C_f) التي تقع تحت محور الفواصل الذي معادلته $y=0$، ومنه: $\boxed{f(x)\le 0\Leftrightarrow S=[-4,9\ ;\ 1]\cup[3\ ;\ 4,7]}$.
- مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\ge 1$ هي مجموعة فواصل نقاط (C_f) التي تقع فوق المستقيم الذي معادلته $y=1$، ومنه: $\boxed{f(x)\ge 1\Leftrightarrow S=\{-5\}\cup[5,2\ ;\ 6]}$.

3)



- $5\le x\le 6\Leftrightarrow 0,5\le f(x)\le 5$
- $-3\le x\le 3\Leftrightarrow -9\le f(x)\le 0,5$.

4) ليكن d المستقيم الذي معادلته: $y=\frac{2}{3}x-2$. لرسم d نعطي قيم لـ x ثم نحسب y.

- $x=0\Leftrightarrow y=-2$.
- $x=3\Leftrightarrow y=0$.
- المستقيم d يشمل النقطتين $\boxed{(0\ ;-2)\ \ \&\ \ (3\ ;0)}$.

(5

❖ مجموعة حلول المعادلة $f(x)=\frac{2}{3}x-2$ هي مجموعة فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم d، ومنه: $\boxed{S=\{-4,3\ ;\ 0\ ;\ 3\ ;\ 5,2\}}$.

❖ مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\leq\frac{2}{3}x-2$ هي مجموعة فواصل نقاط (C_f) التي تقع تحت المستقيم d، ومنه: $\boxed{S=[-4,3\ ;\ 0]\cup[3\ ;\ 5,2]}$.

حل التمرين 5:

1) الدالة f معرفة بـ: $f(x)=\frac{3x-1}{2x+4}$، ومنه f تكون معرفة إذا كان $2x+4\neq 0$ ومنه: $2x+4=0$ أي $x=-2$. ومنه فإن مجموعة تعريف الدالة f هي: $\boxed{D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}}$.

2) حساب صور: -3 ; 1 ; 0 بالدالة f.

❖ $f(0)=\frac{3\times 0-1}{2\times 0+4}=-\frac{1}{4}$ ومنه فإن: صورة 0 بالدالة f هي: $\boxed{f(0)=-\frac{1}{4}}$.

❖ $f(1)=\frac{3\times 1-1}{2\times 1+4}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ومنه فإن: صورة 1 بالدالة f هي: $\boxed{f(1)=\frac{1}{3}}$.

❖ $f(-3)=\frac{3\times(-3)-1}{2\times(-3)+4}=\frac{-10}{-2}=5$ ومنه فإن: صورة (-3) بالدالة f هي: $\boxed{f(-3)=5}$.

3) حساب سوابق $\frac{3}{2}$; 0 ; 1 بالدالة f :

❖ البحث عن سوابق 1 بالدالة f يعود لحل المعادلة: $f(x)=1$. ومنه:

$$f(x)=1\Leftrightarrow\frac{3x-1}{2x+4}=1\Leftrightarrow 3x-1=2x+4\Leftrightarrow x=5$$

ومنه فإن: $\boxed{1}$ له سابقة وحيدة بالدالة f هي 5.

❖ البحث عن سوابق 0 بالدالة f يعود لحل المعادلة: $f(x)=0$. ومنه:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{3x-1}{2x+4}=0\Leftrightarrow 3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

ومنه فإن: $\boxed{0}$ له سابقة وحيدة بالدالة f هي $\frac{1}{3}$.

❖ البحث عن سوابق $\frac{3}{2}$ بالدالة f يعود لحل المعادلة: $f(x)=\frac{3}{2}$. ومنه:

$$f(x)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{3x-1}{2x+4}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2(3x-1)=3(2x+4)\Leftrightarrow 6x-2=6x+12\Leftrightarrow 0x=14$$

المعادلة $0x=14$ ليس لها حلول، ومنه فإن: $\frac{3}{2}$ ليس له سابقة بالدالة f.

4)من أجل كل $x\neq -2$ لدينا:

$$\frac{3}{2}-\frac{7}{2x+4}=\frac{3(x+2)}{2(x+2)}-\frac{7}{2x+4}=\frac{3x+6}{2x+4}-\frac{7}{2x+4}=\frac{3x-1}{2x+4}=f(x)$$

ومنه فإن: $f(x)=\frac{3}{2}-\frac{7}{2x+4}$ من أجل كل $x\in D_f$.

5)دراسة وضعية (C_f) التمثيل البياني للدالة f بالنسبة للمستقيم D الذي معادلته: $y=\frac{3}{2}$.

❖ من أجل كل $x>-2$ لدينا:

$$x+2>0\Leftrightarrow 2x+4>0\Leftrightarrow \frac{7}{2x+4}>0\Leftrightarrow -\frac{7}{2x+4}<0\Leftrightarrow \frac{3}{2}-\frac{7}{2x+4}<\frac{3}{2}\Leftrightarrow f(x)<\frac{3}{2}$$

أي من أجل كل $x>-2$ لدينا $f(x)<\frac{3}{2}$، ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم D.

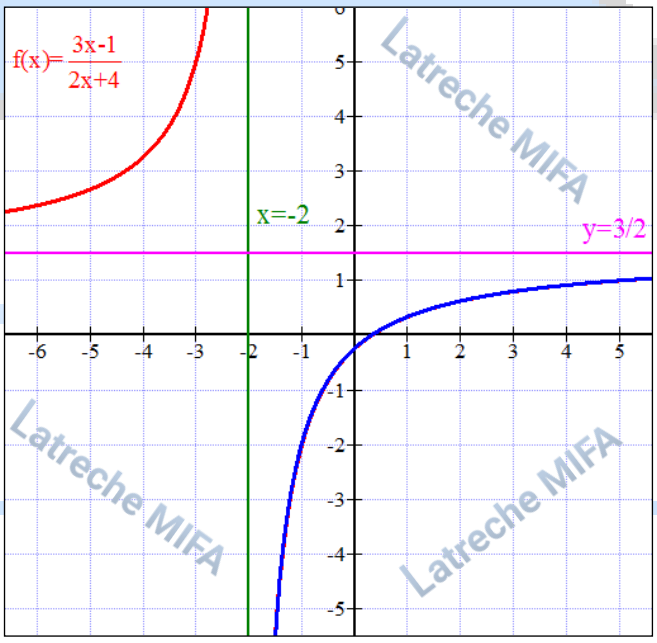
❖ من أجل كل $x<-2$ لدينا:

$$x+2<0\Leftrightarrow 2x+4<0\Leftrightarrow \frac{7}{2x+4}<0\Leftrightarrow -\frac{7}{2x+4}>0\Leftrightarrow \frac{3}{2}-\frac{7}{2x+4}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow f(x)>\frac{3}{2}$$

أي من أجل كل $x<-2$ لدينا $f(x)>\frac{3}{2}$، ومنه (C_f) يقع فوق المستقيم D.

(C_f) يقع فوق المستقيم D عندما $x\in]-2;+\infty[$ و (C_f) يقع تحت المستقيم D عندما $x\in]-\infty;-2[$.

6)



حل التمرين 6:

1) a و b عددان حقيقيان والدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-3x+4$.

$a<b \Leftrightarrow -3a>-3b$ (بضرب طرفي المتباينة في عدد سالب، يتغير اتجاهها)،

و $-3a>-3b \Leftrightarrow -3a+4>-3b+4$ (إضافة أي عدد لطرفي متباينة لا يغير اتجاهها)

ومنه: $a<b \Leftrightarrow -3a+4>-3b+4$.

مما سبق نستنتج أنه إذا كانت f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-3x+4$، فإنه من أجل $a<b \Leftrightarrow f(a)>f(b)$

أي أن الدالة f متناقصة على $\mathbb{R}$.

2) a و b عددان حقيقيان و الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2x-5$.

$a<b \Leftrightarrow 2a<2b$ (بضرب طرفي المتباينة في عدد موجب، لا يتغير اتجاهها)،

و $2a<2b \Leftrightarrow 2a-5<2b-5$ (إضافة أي عدد لطرفي متباينة لا يغير اتجاهها)

ومنه: $a<b \Leftrightarrow 2a-5<2b-5$.

مما سبق نستنتج أنه إذا كانت g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2x-5$، فإنه من أجل $a<b \Leftrightarrow g(a)<g(b)$

أي أن الدالة g متزايدة على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 7:

1) a و b عددان حقيقيان ينتميان للمجال $[0;+\infty[$ حيث $a<b$.

- a^2-b^2 هو جداء شهير ومنه $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.
- نعلم أن: $a\geq 0$ & $b>0$ (لأن $a<b$)، ومنه فإن: $a+b>0$ (مجموع عددين موجبين هو عدد موجب). (1)
- من جهة أخرى نعلم أن: $a-b<0 \Leftrightarrow a<b$. (2)

من (1) و(2) نستنتج أن: $(a+b)(a-b)<0$ (جداء عدد موجب وعدد سالب هو عدد سالب).

لدينا إذن: $a^2-b^2<0$.

- من أجل كل عددين حقيقيين a و b ينتميان للمجال $[0;+\infty[$ حيث $a<b$، لدينا: $a^2-b^2<0$ أي $a^2<b^2$. ومنه فإن الدالة "مربع" متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) a و b عددان حقيقيان ينتميان للمجال $]-\infty;0]$ حيث $a<b$.

- نعلم أن: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.
- ونعلم أن: $a<0$ & $b\leq 0$ (لأن $a<b$)، ومنه فإن: $a+b<0$ (مجموع عددين سالبين هو عدد سالب). (1)

❖ من جهة أخرى نعلم أن: $a<b \Leftrightarrow a-b<0$. (2)

من (1) و(2) نستنتج أن: $(a+b)(a-b)>0$ (جداء عددين سالبين هو عدد موجب).

لدينا إذن: $a^2-b^2>0$.

❖ من أجل كل عددين حقيقيين a و b ينتميان للمجال $]-\infty;0]$ حيث $a<b$ ، لدينا: $a^2-b^2>0$ أي $a^2>b^2$. ومنه فإن الدالة "مربع" متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

حل التمرين 8:

1) a و b عددان حقيقيان ينتميان للمجال $]0;+\infty[$ حيث $a<b$.

❖ نستطيع كتابة $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}$ ومنه $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$.

❖ نعلم أن: $b>0$ & $a>0$ ، ومنه فإن: $ab>0$ (جداء عددين موجبين هو عدد موجب). (1)

❖ من جهة أخرى نعلم أن: $a<b \Leftrightarrow a-b<0$. ومنه فإن: $b-a>0$ (2)

من (1) و(2) نستنتج أن: $\frac{b-a}{ab}>0$ (حاصل قسمة عددين موجبين هو عدد موجب).

لدينا إذن: $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$.

❖ من أجل كل عددين حقيقيين a و b ينتميان للمجال $]0;+\infty[$ حيث $a<b$ ، لدينا: $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$ أي $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$. ومنه فإن الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

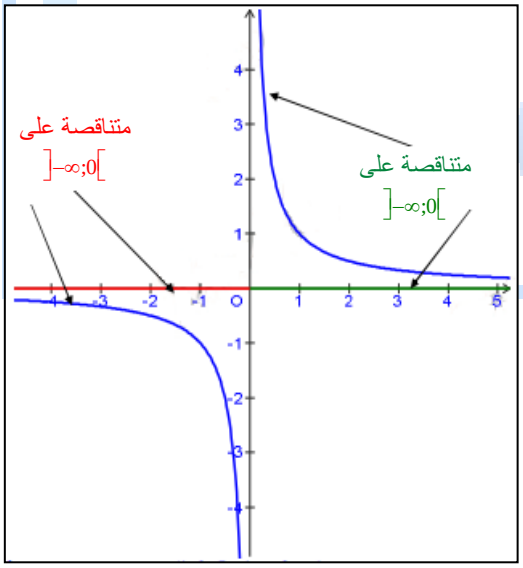
2) a و b عددان حقيقيان ينتميان للمجال $]-\infty;0[$ حيث $a<b$.

❖ نعلم أن: $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$.

❖ ونعلم أن: $b<0$ & $a<0$ ، ومنه فإن: $ab>0$ (جداء عددين سالبين هو عدد موجب). (1)

❖ من جهة أخرى نعلم أن: $a<b \Leftrightarrow a-b<0$. ومنه فإن: $b-a>0$ (2)

من (1) و(2) نستنتج أن: $\frac{b-a}{ab}>0$ (حاصل قسمة عددين موجبين هو عدد موجب). لدينا إذن: $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$.



❖ من أجل كل عددين حقيقيين a و b ينتميان للمجال $]-\infty;0[$ حيث $a<b$، لدينا: $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$ أي $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

ومنه فإن الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$.

حل التمرين 9:

1) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x-4$. a و b عددان حقيقيان حيث $a<b$.

❖ لدينا: $f(a)=3a-4$ و $f(b)=3b-4$، ومنه فإن:

$$f(a)-f(b)=(3a-4)-(3b-4)=3a-3b=3(a-b)$$

❖ نعلم أن: $a<b$ ومنه فإن: $a-b<0$ أي: $3(a-b)<0$ (لأن 3 عدد موجب)، ومنه فإن: $f(a)-f(b)<0$.

❖ نستنتج أنه من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a<b$، لدينا $f(a)-f(b)<0$ أي: $f(a)<f(b)$

ومنه فإن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=-2x+3$. a و b عددان حقيقيان حيث $a<b$.

❖ لدينا: $g(a)=-2a+3$ و $g(b)=-2b+3$، ومنه فإن:

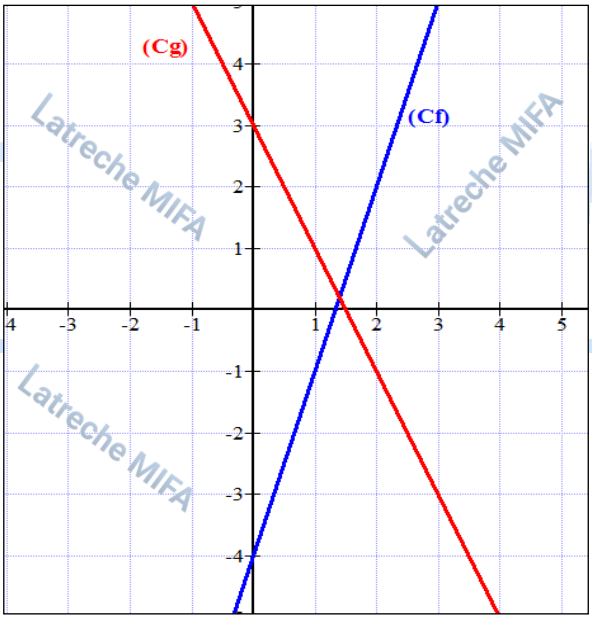
$$g(a)-g(b)=(-2a+3)-(-2b+3)=-2a+2b=-2(a-b)$$

❖ نعلم أن: $a<b$ ومنه فإن: $a-b<0$ أي: $-2(a-b)>0$ (لأن -2 عدد سالب)، ومنه فإن: $g(a)-g(b)>0$.

❖ نستنتج أنه من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a<b$، لدينا $g(a)-g(b)>0$ أي: $g(a)>g(b)$

ومنه فإن الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

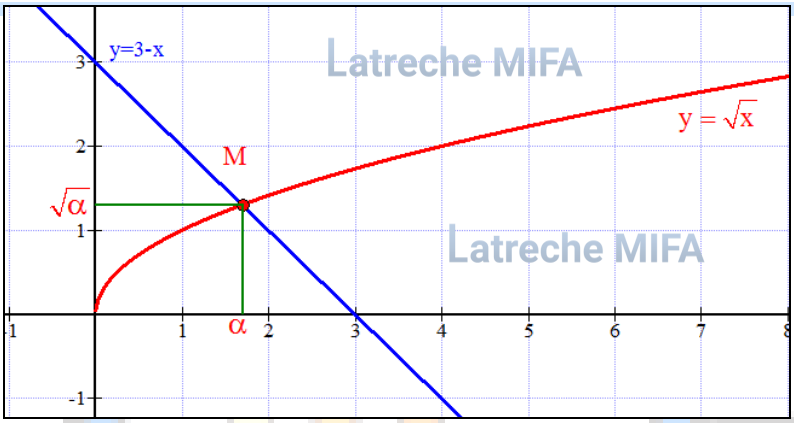
3)



حل التمرين 10:

1) نلاحظ أنه يمكن كتابة المعادلة $\sqrt{x}+x-3=0$ على الشكل التالي: $\sqrt{x}=3-x$. هذه المعادلة معرفة على المجال $]0;+\infty[$.

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة " جذر مربع" والمستقيم الذي معادلته: $y=3-x$.



من خلال الشكل نلاحظ أن هناك نقطة تقاطع وحيدة M بين التمثيل البياني للدالة "جذر مربع" والمستقيم الذي معادلته: $y=3-x$. فاصلة هذه النقطة هي α حيث: $\alpha\approx 1,7$.

نستنتج أن المعادلة $\sqrt{x}+x-3=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ حيث: $\boxed{\alpha\approx 1,7}$.

2)

- نعلم أن α هي نقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة "جذر مربع" والمستقيم الذي معادلته: $y=3-x$. ومنه فإن: $\sqrt{\alpha}=3-\alpha$.
- ونعلم أن مربع عددين متساويين هما عددان متساويان، ومنه فإن:

$$\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=(3-\alpha)^2 \Leftrightarrow \alpha=9-6\alpha+\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2-7\alpha+9=0$$

إذن فإن: $\boxed{\alpha \text{ هي حل للمعادلة } x^2-7x+9=0}$.

3) x^2-7x+9 يمكن كتابتها على الشكل

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{13}{4}=x^2-7x+\frac{49}{4}-\frac{13}{4}=x^2-7x+\frac{36}{4}$$

أي أن: $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{13}{4}=x^2-7x+9$. نستطيع إذن كتابة:

$$x^2-7x+9=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{13}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}=0 \quad 0 \quad -\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}=x \quad \text{أو}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2} \quad x \quad =\text{أو}\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$$

من خلال السؤال السابق، α هي حل للمعادلة $x^2-7x+9=0$، إذن فإن α هي أحد الحلين المتحصل عليهما.

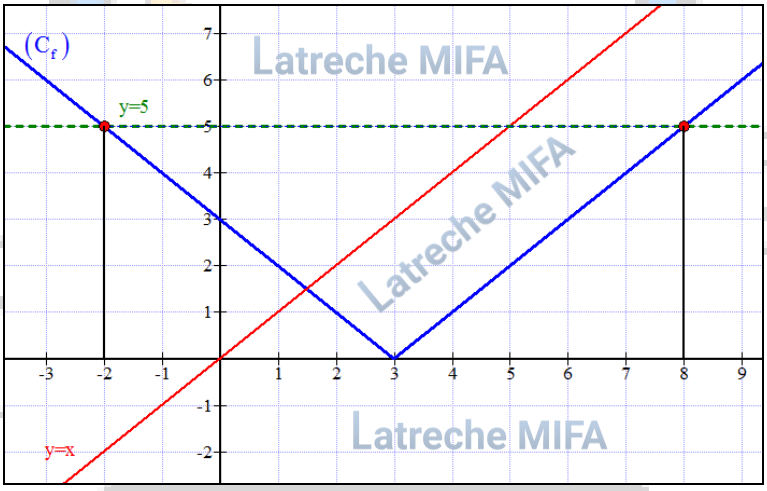
لدينا: $\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\approx 5,3$ و $\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\approx 1,7$.

باستعمال نتيجة السؤال الأول فإن: $\boxed{\alpha=\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}}$.

باستعمال الحاسبة نتحصل على $\boxed{\alpha=1,69722}$.

حل التمرين 11:

1) باللون الأزرق على الشكل (C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=|x-3|$.



2) نلاحظ أنه يمكن استنتاج (C_f) من التمثيل البياني للدالة "قيمة مطلقة" عن طريق الانسحاب الذي شعاعه: $\vec{u}(3\ ;\ 0)$.

3) حل المعادلتين $f(x)=5$ و $f(x)=x$ بيانيا:

❖ حلول المعادلة $f(x)=5$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) والمستقيم الذي معادلته: $y=5$.

$\boxed{f(x)=5\Leftrightarrow S=\{-2\ ;\ 8\}}$.

❖ حلول المعادلة $f(x)=x$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) والمستقيم الذي معادلته: $y=x$.

$\boxed{f(x)=5\Leftrightarrow S=\{1,5\}}$.

4) حل المعادلتين $f(x)=5$ و $f(x)=x$ حسابيا:

❖ $f(x)=5\Leftrightarrow |x-3|=5\Leftrightarrow x-3=5$ أو $x-3=-5\Leftrightarrow x=8$ أو $x=-2$

$\boxed{f(x)=5\Leftrightarrow S=\{-2\ ;\ 8\}}$.

❖ لحل المعادلة $f(x)=x$، هناك حالتان:

• الحالة الأولى: $x<3 \Leftrightarrow x-3<0$ أي: $|x-3|=-(x-3)=-x+3$. في هذه الحالة يكون لدينا:

$f(x)=x \Leftrightarrow -x+3=x \Leftrightarrow 3=2x \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

وبما أن $\frac{3}{2}<3$ فإن: $\frac{3}{2}$ هو حل للمعادلة $f(x)=x$ (1).

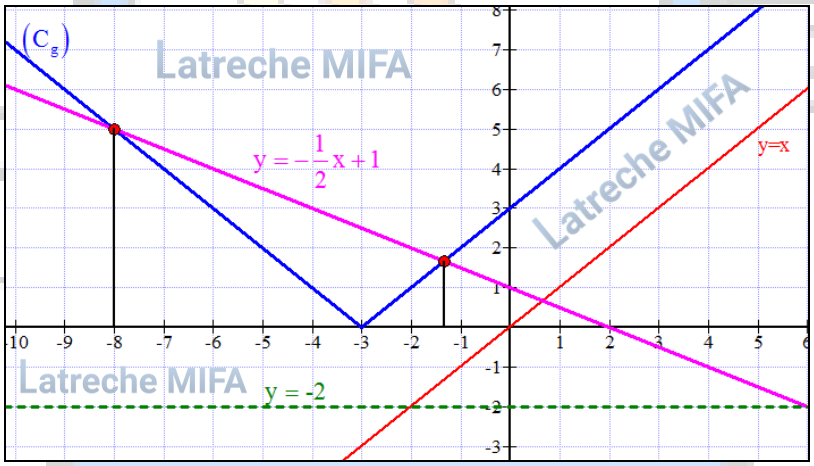
• الحالة الثانية: $x>3 \Leftrightarrow x-3>0$ أي: $|x-3|=x-3$. في هذه الحالة يكون لدينا:

$f(x)=x \Leftrightarrow x-3=x \Leftrightarrow -3=0x$. وهذه المعادلة ليس لها حل. (2)

• من (1) و(2) نستنتج: $\boxed{f(x)=x \Leftrightarrow S=\left\{\frac{3}{2}\right\}}$.

حل التمرين 12:

1) باللون الأزرق على الشكل (C_g) التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=|x+3|$.



2) نلاحظ أنه يمكن استنتاج (C_g) من التمثيل البياني للدالة "قيمة مطلقة" عن طريق الانسحاب الذي شعاعه: $\vec{u}(-3\,;\,0)$.

3) حل المعادلات $g(x)=-\frac{1}{2}x+1$; $g(x)=x$; $g(x)=-2$ بيانيا:

❖ حلول المعادلة $g(x)=-2$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_g) والمستقيم الذي معادلته: $y=-2$.

نلاحظ أنه لا يوجد أية نقطة تقاطع بين (C_g) والمستقيم الذي معادلته: $y=-2$ ومنه فإن:

$\boxed{g(x)=-2 \Leftrightarrow S=\varnothing}$.

❖ حلول المعادلة $g(x)=x$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_g) والمستقيم الذي معادلته: $y=x$.

نلاحظ أنه لا يوجد أية نقطة تقاطع بين (C_g) والمستقيم الذي معادلته: $y=x$ ومنه فإن:

$\boxed{g(x)=x \Leftrightarrow S=\varnothing}$.

❖ حلول المعادلة $g(x)=-\frac{1}{2}x+1$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_g) والمستقيم الذي معادلته: $y=-\frac{1}{2}x+1$. ومنه $\boxed{g(x)=-\frac{1}{2}x+1\Leftrightarrow S=\{-8\ ;\ -1,3\}}$.

4)حل المعادلات $g(x)=-\frac{1}{2}x+1$; $g(x)=x$; $g(x)=-2$ حسابيا:

❖ نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $|x+3|\geq 0$. و (-2) هو عدد سالب، ومنه فإن: $\boxed{g(x)=-2\Leftrightarrow S=\varnothing}$.

❖ لحل المعادلة $g(x)=x$، هناك حالتان:

- الحالة الأولى: $x+3<0\Leftrightarrow x<-3$ أي: $|x+3|=-(x+3)=-x-3$. في هذه الحالة يكون لدينا: $g(x)=x\Leftrightarrow -x-3=x\Leftrightarrow -3=2x\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$. وبما أن $-\frac{3}{2}>-3$ فإن: $-\frac{3}{2}$ ليس حلا للمعادلة $g(x)=x$ (1).
- الحالة الثانية: $x+3>0\Leftrightarrow x>-3$ أي: $|x+3|=x+3$. في هذه الحالة يكون لدينا: $g(x)=x\Leftrightarrow x+3=x\Leftrightarrow 3=0x$. وهذه المعادلة ليس لها حل. (2)
- من (1) و(2) نستنتج: $\boxed{g(x)=x\Leftrightarrow S=\left\{\frac{3}{2}\right\}}$.

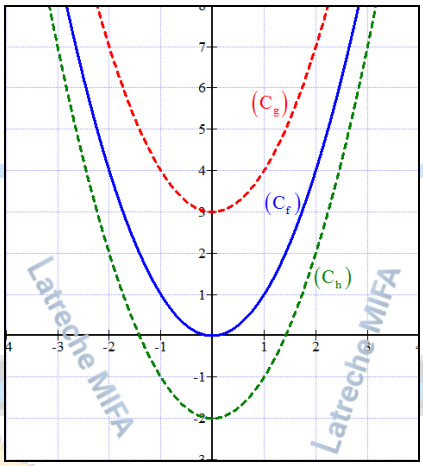
❖ لحل المعادلة $g(x)=-\frac{1}{2}x+1$، هناك حالتان:

- الحالة الأولى: $x+3<0\Leftrightarrow x<-3$ أي: $|x+3|=-(x+3)=-x-3$. في هذه الحالة يكون لدينا: $g(x)=-\frac{1}{2}x+1\Leftrightarrow -x-3=-\frac{1}{2}x+1\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x=4\Leftrightarrow x)-8$. وبما أن $-8<-3$ فإن: -8 هو حل للمعادلة $g(x)=-\frac{1}{2}x+1$ (1).
- الحالة الثانية: $x+3>0\Leftrightarrow x>-3$ أي: $|x+3|=x+3$. في هذه الحالة يكون لدينا: $g(x)=-\frac{1}{2}x+1\Leftrightarrow x+3=-\frac{1}{2}x+1\Leftrightarrow \frac{3}{2}x=-2\Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}$. وبما أن $-\frac{4}{3}<-3$ فإن: $-\frac{4}{3}$ هو حل للمعادلة $g(x)=-\frac{1}{2}x+1$ (2).
- من (1) و(2) نستنتج: $\boxed{g(x)=-\frac{1}{2}x+1\Leftrightarrow S=\left\{-8\ ;\ -\frac{4}{3}\right\}}$.

Latreche MIFA

حل التمرين 13:

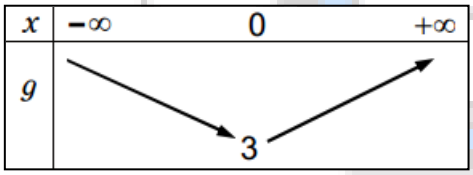
1) الدوال f، g وh معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x^2-2$; $g(x)=x^2+3$; $f(x)=x^2$.



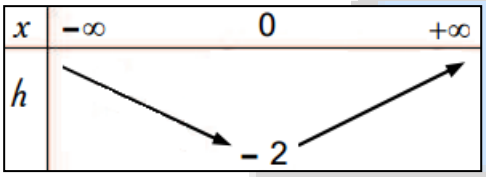
2)

- نلاحظ أنه يمكن استنتاج (C_g) من (C_f) عن طريق الانسحاب الذي شعاعه: $\vec{u}(0\ ;\ 3)$.
- نلاحظ أنه يمكن استنتاج (C_h) من (C_f) عن طريق الانسحاب الذي شعاعه: $\vec{v}(0\ ;\ -2)$.

3) من الشكل، يمكن استنتاج جدول تغيرات الدوال g وh:



- لدينا: $g(x)=x^2+3=f(x)+3$، فالدالة g هي مجموع الدالة "مربع" بعدد حقيقي، ومنه فإن: الدالة f والدالة g لهما نفس اتجاه التغير.



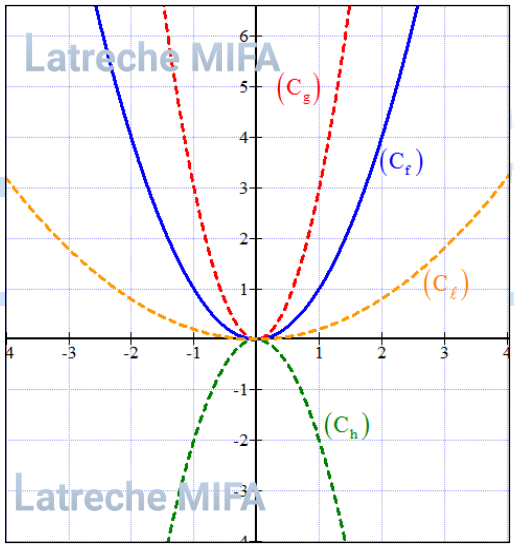
- لدينا: $h(x)=x^2-2=f(x)-2$، فالدالة h هي مجموع الدالة "مربع" بعدد حقيقي، ومنه فإن: الدالة f والدالة h لهما نفس اتجاه التغير.

حل التمرين 14:

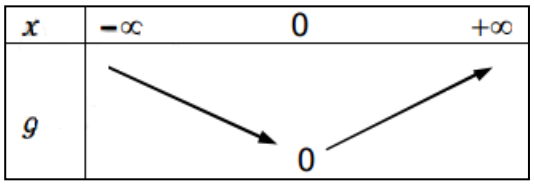
1) لدينا الدوال f، g، h، و ℓ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x)=x^2$، $g(x)=3x^2$

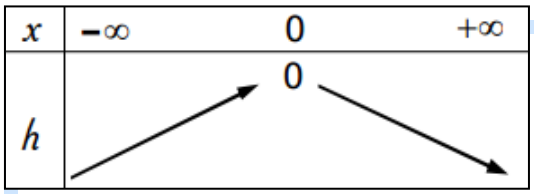
$h(x)=-2x^2$، $\ell(x)=\frac{1}{5}x^2$.



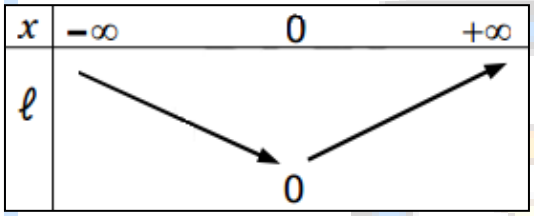
(2



❖ لدينا: $g(x)=3x^2=3f(x)$، فالدالة g هي جداء الدالة "مربع" بعدد حقيقي موجب، ومنه فإن: الدالة f والدالة g لهما نفس اتجاه التغير.



❖ لدينا: $h(x)=-2x^2=-2f(x)$، فالدالة h هي جداء الدالة "مربع" بعدد حقيقي سالب، ومنه فإن: الدالة h لها اتجاه تغير معاكس لاتجاه تغير الدالة f.

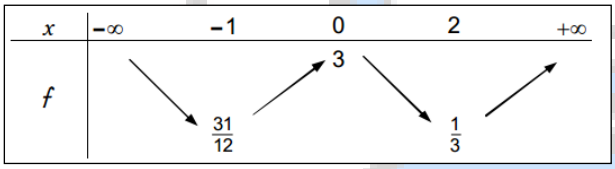


❖ لدينا: $\ell(x)=\frac{1}{5}x^2=\frac{1}{5}f(x)$، فالدالة ℓ هي جداء الدالة "مربع" بعدد حقيقي موجب، ومنه فإن: الدالة f والدالة ℓ لهما نفس اتجاه التغير.

حل التمرين 15:

لدينا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+3$، والدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

ولدينا جدول تغيرات الدالة f المبين في الشكل المقابل.



(1

❖ من جدول تغيرات الدالة f، نلاحظ أن لها قيمة حدية صغرى هي $\frac{1}{3}$ حيث: $f(2)=\frac{1}{3}$.

❖ بما أن الدالة f لها قيمة حدية صغرى هي $\frac{1}{3}$، فإن: $f(x)\geq 0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$. نستنتج من ذلك أن $\sqrt{f(x)}$ معرفة من أجل كل $x\in\mathbb{R}$. ومنه فإن: الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$.

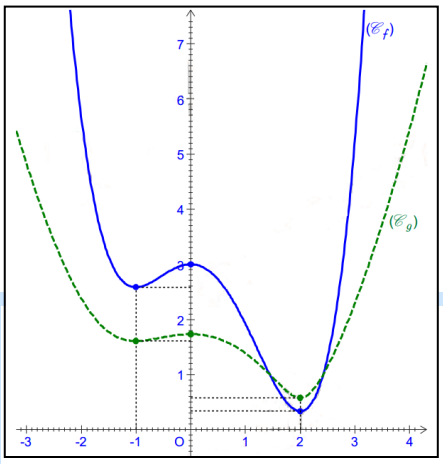
❖ حساب $g(2)$; $g(0)$; $g(-1)$:

❖ $g(-1)=\sqrt{f(-1)}=\sqrt{\frac{31}{12}}=\frac{1}{6}\sqrt{93}\Leftrightarrow g(-1)\approx 1,607$.

❖ $g(0)=\sqrt{f(0)}=\sqrt{3}\Leftrightarrow g(0)\approx 1,732$.

❖ $g(2)=\sqrt{f(2)}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow g(2)\approx 0,577$.

2) على نفس المعلم رسمنا (C_f) و (C_g). نلاحظ أن ما تحصلنا عليه في الشكل المقابل يؤكد جدول تغيرات الدالة f في الأعلى. ومن الشكل يمكن استنتاج جدول تغيرات الدالة g الذي يكون كالتالي:



x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
g		↘	$\sqrt{\frac{31}{12}}$	↗	$\sqrt{3}$	↘	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	↗	

حل التمرين 16:

1) لدينا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+\frac{3}{2}$. و g الدالة المعرفة بـ: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

❖ لدينا $f(x)=x^2+\frac{3}{2}$ ومنه فإن الدالة f هي مجموع الدالة "مربع" بعدد حقيقي، ومنه فإن: الدالة f والدالة "مربع" لهما نفس اتجاه التغير (الشكل المقابل).

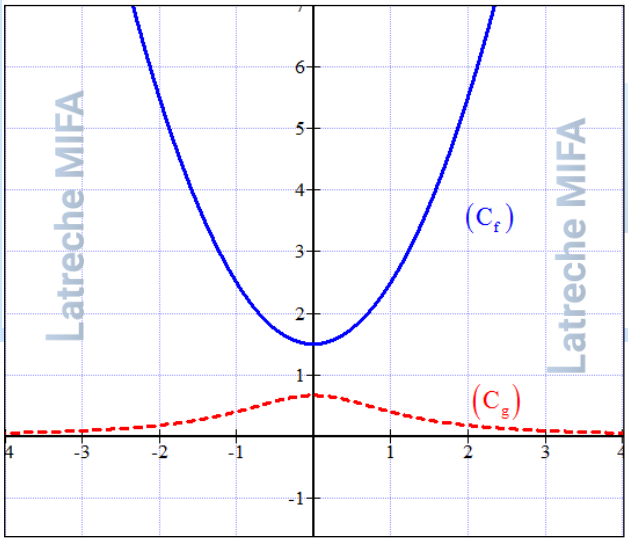
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	$\frac{3}{2}$	↗	

❖ الدالة f لها قيمة حدية صغرى هي $\frac{3}{2}$ ومنه فإن: $f(x)\geq\frac{3}{2}$ أي: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $f(x)\neq 0$.

نستنتج أن الدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$، معرفة على $\mathbb{R}$.

2) على نفس المعلم رسمنا (C_f) و (C_g).

❖ الدالة g هي مقلوب الدالة f، ومنه فإن جدول تغيرات الدالة g معاكس لجدول تغيرات الدالة f. ومنه فإن الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ ومتناقصة تماما على $[0;+\infty[$، أي جدول تغيرات الدالة g يكون كالتالي:



x	$-\infty$		0		$+\infty$
g		↗	$\frac{2}{3}$	↘	

حل التمرين 17:

لدينا الدوال f، g وh المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=-2x-3$; $g(x)=-6x+4$; $f(x)=3x+2$.

1) الدوال f، g وh هي دوال تآلفية.

❖ الدالة f، معاملها موجب ومنه فإن: الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.

❖ الدالتان g وh، معاملاهما سالبان ومنه فإن: الدالتان g و h متناقصة على $\mathbb{R}$.

2) الدالتان s وt معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $t(x)=f(x)+h(x)$; $s(x)=f(x)+g(x)$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $s(x)=f(x)+g(x)=3x+2+(-6x+4)=-3x+6$. الدالة s دالة تآلفية معاملها سالب ومنه فإن: الدالة s متناقصة على $\mathbb{R}$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $t(x)=f(x)+h(x)=3x+2+(-2x-3)=x-1$. الدالة t دالة تآلفية معاملها موجب ومنه فإن: الدالة t متزايدة على $\mathbb{R}$.

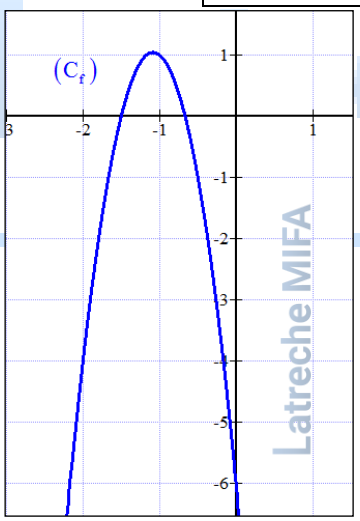
❖ اتجاه تغير مجموع دالتين إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة:

- الدالة s هي مجموع الدالة f المتزايدة والدالة g المتناقصة، وs دالة متناقصة. (1)
- الدالة t هي مجموع الدالة f المتزايدة والدالة h المتناقصة، وt دالة متزايدة. (2)
- من (1) و(2) نستنتج أنه لا توجد قاعدة عامة تعطي اتجاه تغير مجموع دالتين إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة.

3) الدالة p معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $p(x)=f(x)\times g(x)$، والدالة q معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $q(x)=f(x)\times h(x)$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $p(x)=f(x)\times g(x)=(3x+2)(-6x+4)=-18x^2+8$.

- (-18) عدد سالب، ومنه فإن الدالة $x\to -18x^2$ لها اتجاه تغير معاكس لاتجاه تغير الدالة "مربع". (1)
- ونعلم أن الدالة $x\to -18x^2+8$ لها نفس اتجاه تغير الدالة $x\to -18x^2$. (2)
- من (1) و(2) نستنتج أن الدالة p متزايدة على $[0;+\infty[$ ومتناقصة على $]-\infty;0]$.



❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا:
$q(x)=f(x)\times h(x)=(3x+2)(-2x-3)=-6x^2-13x-6$.

- الشكل المقابل يمثل التمثيل البياني للدالة q، وهو يوضح أن الدالة q ليست متزايدة على $]-\infty;0]$. ويمكن التحقق من ذلك بحساب:
$q(-1)=1$ و $q(0)=-6$.

- الدالة q ليس لها نفس اتجاه تغير الدالة p.

❖ الدالتان p و q كلاهما جداء دالتين إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة، و مع ذلك ليس لهما نفس اتجاه التغير. ومنه نستنتج أنه لا توجد قاعدة عامة تعطي اتجاه تغير جداء دالتين إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة.

حل التمرين 18:

1) الدوال f، g و h معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\sqrt{x^2+1}$; $g(x)=\dfrac{1}{2x^2+3}$; $f(x)=3x^2-5$.

❖ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x^2-5$.

- 3 عدد موجب، ومنه فإن الدالة $x\to 3x^2$ لها نفس اتجاه تغير الدالة "مربع". (1)
- ونعلم أن الدالة $x\to 3x^2-5$ لها نفس اتجاه تغير الدالة $x\to 3x^2$. (2)
- من (1) و(2) نستنتج أن الدالة f لها نفس اتجاه تغير الدالة "مربع". أي أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

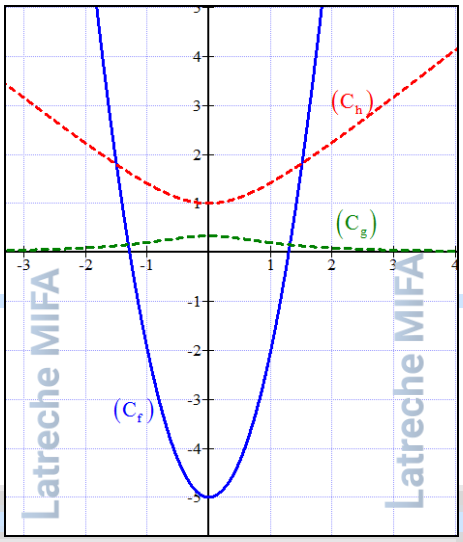
❖ الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\dfrac{1}{2x^2+3}$.

- 2 عدد موجب، ومنه فإن الدالة $x\to 2x^2$ لها نفس اتجاه تغير الدالة "مربع". (1)
- ونعلم أن الدالة $x\to 2x^2+3$ لها نفس اتجاه تغير الدالة $x\to 2x^2$. (2)
- من (1) و(2) نستنتج أن الدالة $x\to 2x^2+3$ لها نفس اتجاه تغير الدالة "مربع". أي أن الدالة $x\to 2x^2+3$ متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$.
- من جهة أخرى، نعلم أن الدالة $x\to\dfrac{1}{2x^2+3}$ لها اتجاه تغير معاكس للدالة $x\to 2x^2+3$. نستنتج من ذلك أن: الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ ومتناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

❖ الدالة h معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\sqrt{x^2+1}$.

- من أجل كل عدد حقيقي k، الدالة $x\to x^2+k$ لها نفس اتجاه تغير الدالة "مربع".
- من جهة أخرى، لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $x^2+1>0$. ونعلم أن الدالتين u و $\sqrt{u}$ لهما نفس اتجاه التغير. نستنتج من ذلك أن الدالة $x\to\sqrt{x^2+1}$ متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$. أي أن الدالة h متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f)، (C_g) و (C_h). وهو يبين صحة النتائج المتحصل عليها سابقا.



حل التمرين 19:

الدالة f معرفة بـ: $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

1) $x\in D_f \Leftrightarrow x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ ومنه فإن مجموعة تعريف الدالة f هي: $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2)من أجل كل $x\neq 1$، لدينا:

$$\frac{3}{x-1}+2=\frac{3}{x-1}+\frac{2(x-1)}{x-1}=\frac{3+2x-2}{x-1}=\frac{2x+1}{x-1}=f(x)$$

لدينا إذن: $f(x)=\dfrac{3}{x-1}+2$ من أجل كل $x\in D_f$.

3)

❖ على المجال $]-\infty;1[$:

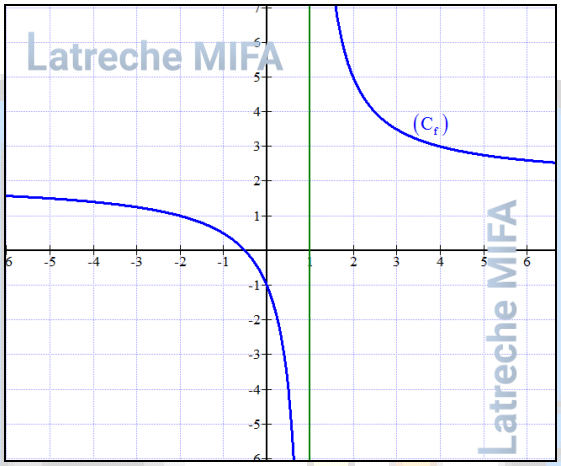
- الدالة التآلفية $x\to x-1$ متزايدة تماما و $x-1<0$.
- الدالة $x\to\dfrac{1}{x-1}$ لها اتجاه تغير معاكس للدالة $x\to x-1$. ومنه فإن: الدالة $x\to\dfrac{1}{x-1}$ متناقصة تماما على $]-\infty;1[$.
- 3 عدد موجب ومنه فإن: الدالة $x\to\dfrac{3}{x-1}$ متناقصة تماما على $]-\infty;1[$. ومنه فإن: الدالة $x\to\dfrac{3}{x-1}+2$ متناقصة تماما على $]-\infty;1[$. أي أن: الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$.

❖ على المجال $]1;+\infty[$:

- الدالة التآلفية $x\to x-1$ متزايدة تماما و $x-1>0$.

- الدالة $x \to \frac{1}{x-1}$ لها اتجاه تغير معاكس للدالة $x \to x-1$. ومنه فإن: الدالة $x \to \frac{1}{x-1}$ متناقصة تماما على $]1;+\infty[$.
- 3 عدد موجب ومنه فإن: الدالة $x \to \frac{3}{x-1}$ متناقصة تماما على $]1;+\infty[$. ومنه فإن: الدالة $x \to \frac{3}{x-1}+2$ متناقصة تماما على $]1;+\infty[$. أي أن: الدالة f متناقصة تماما على $]1;+\infty[$.

4) الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f ، وهو يبين صحة النتائج المتحصل عليها سابقا.



حل التمرين 20:

الجدول المقابل يمثل جدول تغيرات الدالة f.

x	-5		-1		3		5
f	8	↘	2	↗	6	↘	3

1) الدالة g معرفة بـ: $g(x) = -3f(x) + 10$.

❖ بما أن (-3) عدد سالب، فإن: الدالة $x \to -3f(x)$ لها اتجاه تغير معاكس للدالة f.

❖ الدالة $x \to -3f(x)+10$ لها نفس اتجاه تغير الدالة $x \to -3f(x)$. ومنه فإن: الدالة $x \to -3f(x)+10$ لها اتجاه تغير معاكس للدالة f. أي أن الدالة g لها اتجاه تغير معاكس للدالة f. ومنه فإن جدول تغيرات الدالة g يكون كالتالي:

x	-5		-1		3		5
g	-14	↗	4	↘	-8	↗	1

2) الدالة h معرفة بـ: $h(x) = \sqrt{f(x)-2}$.

❖ الدالة $x \to f(x)-2$ لها نفس اتجاه تغير الدالة f.

ومنه يمكن تشكيل جدول تغيراتها كما يلي:

x	-5		-1		3		5
f-2	6	↘	0	↗	4	↘	1

❖ من خلال الجدول نلاحظ أنه من أجل كل $x \in [-5;5]$ لدينا $f-2 \geq 0$. إذن الدالة $x \to \sqrt{f(x)-2}$ لها نفس اتجاه تغير الدالة $x \to f(x)-2$.

أي أن الدالة h لها نفس اتجاه تغير الدالة f.

❖ بالإضافة لذلك لدينا:

$$h(-5)=\sqrt{f(-5)-2}=\sqrt{8-2}=\sqrt{6}$$
$$h(-1)=\sqrt{f(-1)-2}=\sqrt{2-2}=0$$
$$h(3)=\sqrt{f(3)-2}=\sqrt{6-2}=2$$
$$h(5)=\sqrt{f(5)-2}=\sqrt{3-2}=1$$

x	-5		-1		3		5
h	$\sqrt{6}$	↘	0	↗	2	↘	1

ومنه فإن: جدول تغيرات الدالة h يكون كالتالي:

3) الدالة p معرفة بـ: $p(x)=\dfrac{1}{f(x)-2}$.

❖ الدالة p معرفة من أجل $f(x)\neq 2$. ومن جدول تغيرات الدالة f لدينا: $f(-1)=2$، إذن الدالة p معرفة من أجل كل $x\neq -1$ مع $x\in[-5\,;\,5]$. ومنه نستنتج أن: $\boxed{D_p=[-5\,;\,-1[\cup]-1\,;\,5]}$.

❖ مما سبق علمنا أن الدالة $x\to f-2$ لها نفس اتجاه تغير الدالة f. ونعلم أنه من أجل كل $x\in D_p$، الدالة $x\to\dfrac{1}{f(x)-2}$ لها اتجاه تغير معاكس للدالة $x\to f-2$، أي أن الدالة $x\to\dfrac{1}{f(x)-2}$ لها اتجاه تغير معاكس للدالة f.

❖ من جهة أخرى لدينا:

$$p(-5)=\frac{1}{f(-5)-2}=\frac{1}{8-2}=\frac{1}{6}$$
$$p(3)=\frac{1}{f(3)-2}=\frac{1}{6-2}=\frac{1}{4}$$
$$p(5)=\frac{1}{f(5)-2}=\frac{1}{3-2}=1$$

ومنه فإن: جدول تغيرات الدالة p يكون كالتالي:

x	-5		-1		3		5
g	$\frac{1}{6}$	↗	‖	↘	$\frac{1}{4}$	↗	1

حل التمرين 21:

الدالتان f وg معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-5$ و $g(x)=x^2-x+2$.

1) $h=f+g$، و $D_h=\mathbb{R}$.

$h(x)=f(x)+g(x)=x-5+x^2-x+2$.

$\boxed{h(x)=x^2-3}$

2) $h=2f-3g$، و $D_h=\mathbb{R}$.

$h(x)=2f(x)-3g(x)=2(x-5)-3(x^2-x+2)=2x-10-3x^2+3x-6$.

$\boxed{h(x)=-3x^2+5x-16}$

3) $h=f\times g$، $D_h=\mathbb{R}$.

$h(x)=f(x)\times g(x)=(x-5)(x^2-x+2)=x^3-x^2+2x-5x^2+5x-10$

$\boxed{h(x)=x^3-6x^2+7x-10}$.

4) $h=\frac{f}{g}$، الدالة h معرفة من أجل $g(x)\neq 0$. ولدينا: $g(x)=x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ أي أن $g(x)>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$. ومنه فإن: $D_h=\mathbb{R}$.

$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ أي $\boxed{h(x)=\frac{x-5}{x^2-x+2}}$.

5) $h=\frac{f-g}{g+1}$، من السؤال السابق لدينا: $g(x)>0$ ومنه فإن: $g(x)+1\neq 0$. ومنه فإن: $D_h=\mathbb{R}$.

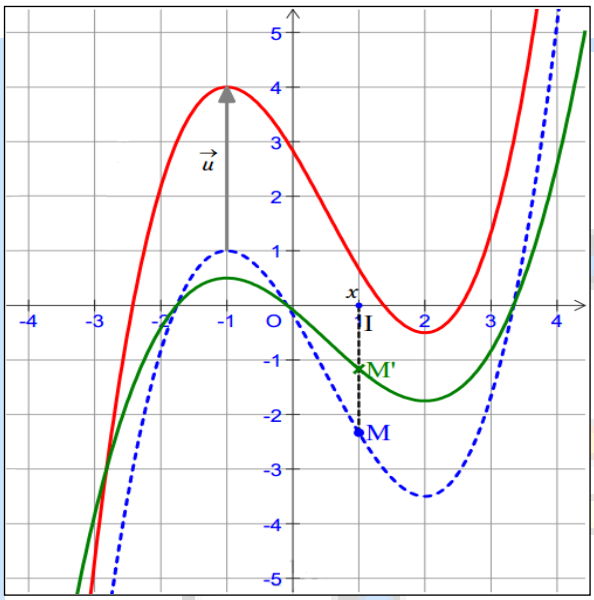
$h(x)=\frac{f(x)-g(x)}{g(x)+1}=\frac{x-5-(x^2-x+2)}{x^2-x+2}=\frac{x-5-x^2+x-2}{x^2-x+2}$

$\boxed{h(x)=\frac{-x^2+2x-7}{x^2-x+2}}$.

Latreche MIFA

حل التمرين 22:

انطلاقا من (C_f) التمثيل البياني للدالة f نرسم (C_g) و (C_h) التمثيلين البيانيين للدالتين: $g=f+3$ و $h=\frac{1}{2}f$ على الترتيب.



❖ $g=f+3$ ومنه فإن: (C_g) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(0\,;3)$.

❖ $h=\frac{1}{2}f$، لرسم (C_h) انطلاقا من (C_f) نتبع الخطوات التالية:

- من أجل كل نقطة M من (C_f) فاصلتها x، نأخذ النقطة I من محور الفواصل فاصلتها x، ثم نرسم النقطة M' منتصف القطعة $[IM]$.
- مجموعة النقاط M' المتحصل عليها تمثل (C_h).

الشكل المقابل يمثل (C_f)، (C_g) و (C_h).

حل التمرين 23:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+2x+3$.

(1

❖ $f(2)=2^2+2\times2+3=4+4+3\Leftrightarrow f(2)=11$.

❖ $f(-3)=(-3)^2+2\times(-3)+3=9-6+3\Leftrightarrow f(-3)=6$.

❖ $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{4}+1+3\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{4}$.

❖ $f\left(-\sqrt{3}\right)=\left(-\sqrt{3}\right)^2+2\times\left(-\sqrt{3}\right)+3=3-2\sqrt{3}+3\Leftrightarrow f\left(-\sqrt{3}\right)=6-2\sqrt{3}$.

❖ $f\left(1+\sqrt{3}\right)=\left(1+\sqrt{3}\right)^2+2\times\left(1+\sqrt{3}\right)+3=1+2\sqrt{3}+3+2+2\sqrt{3}+3$

$f\left(1+\sqrt{3}\right)=9+4\sqrt{3}$

(2

❖ $f(x)-3=x^2+2x+3-3\Leftrightarrow f(x)-3=x^2+2x$.

❖ $3f(x)=3\left(x^2+2x+3\right)\Leftrightarrow 3f(x)=3x^2+6x+9$.

❖ $f\left(\frac{1}{2}x\right)=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+2\left(\frac{1}{2}x\right)+3 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{4}x^2+x+3.$

❖ $f\left(x^2+1\right)=\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)+3=x^4+2x^2+1+2x^2+2$

$f\left(x^2+1\right)=x^4+4x^2+6.$

حل التمرين 24:

f و g دالتان معرفتان بـ: $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=-x+5$.

الدالة f معرفة على $[0;+\infty[$، والدالة g معرفة على $\mathbb{R}$.

1)حساب: $g(1)$، $g(-4)$ و $g(8)$ ثم $f(g(1))$ و $f(g(-4))$.

❖ $g(1)=-1+5=4.$

❖ $g(-4)=-(-4)+5=4+5=9.$

❖ $g(8)=-8+5=-3.$

❖ $f\left(g(1)\right)=f(4)=\sqrt{4}=2.$

❖ $f\left(g(1)\right)=f(9)=\sqrt{9}=3.$

❖ لا يمكن حساب $f\left(g(8)\right)$ لأن الدالة f معرفة على $[0;+\infty[$ و $g(8)=-3<0$.

2)نعلم أن الدالة f معرفة على $[0;+\infty[$، والدالة g معرفة على $\mathbb{R}$. الدالة $f\left(g(x)\right)$ تكون معرفة من أجل $g(x)\in[0;+\infty[$ أي $-x+5\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 5$. ومنه فإن: $\boxed{I=]-\infty\ ;\ 5]}$.

حل التمرين 25:

الدالة u معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x)=x^2-3$ والدالة v معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $v(x)=2x-1$.

أحسب: $u\circ v$ و $v\circ u$.

1)الدالة $v\circ u$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$v\circ u(x)=v\left(u(x)\right)=v\left(x^2-3\right)=2\left(x^2-3\right)-1=2x^2-7$

ومنه فإن: $\boxed{\text{الدالة } v\circ u \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ: } v\circ u(x)=2x^2-7}$.

2)الدالة $u\circ v$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$u\circ v(x)=u\left(v(x)\right)=u(2x-1)=(2x-1)^2-3=4x^2-4x+1-3=4x^2-4x-2$

ومنه فإن: $\boxed{\text{الدالة } u\circ v \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ: } u\circ v(x)=4x^2-4x-2}$.

حل التمرين 26:

ذكر مجموعة تعريف $f\circ g$ و $g\circ f$ ثم حساب $f\circ g(x)$ و $g\circ f(x)$:

1) من أجل: $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=3x+5$.

❖ الدالة f معرفة على $[0;+\infty[$ والدالة g معرفة على $\mathbb{R}$. الدالة $f\circ g$ تكون معرفة عندما تكون $g(x)\in[0;+\infty[$ أي: $3x+5\geq 0$ أي $x\geq\frac{-5}{3}$. ومنه فإن: الدالة $f\circ g$ معرفة على $\left[-\frac{5}{3};+\infty\right[$.

$$f\circ g(x)=f(g(x))=f(3x+5)=\sqrt{3x+5}.$$

ومنه فإن $D_{f\circ g}=\left[-\frac{5}{3};+\infty\right[$ و $\boxed{f\circ g(x)=\sqrt{3x+5}}$.

❖ الدالة f معرفة على $[0;+\infty[$ والدالة g معرفة على $\mathbb{R}$. الدالة $g\circ f$ تكون معرفة عندما تكون $f(x)$ معرفة. ومنه فإن: الدالة $g\circ f$ معرفة على $[0;+\infty[$.

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x}\right)=3\sqrt{x}+5.$$

ومنه فإن $D_{g\circ f}=[0;+\infty[$ و $\boxed{g\circ f(x)=3\sqrt{x}+5}$.

2) من أجل: $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=x^2+1$.

❖ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$ والدالة g معرفة على $\mathbb{R}$. الدالة $f\circ g$ تكون معرفة عندما تكون $g(x)\neq 0$ أي: $x^2+1\neq 0$. وبما أنه من أجل كل عدد حقيقي $x^2\geq 0$ أي $x^2+1\geq 1$ فإن: $x^2+1\neq 0$. ومنه فإن: الدالة $f\circ g$ معرفة على $\mathbb{R}$.

$$f\circ g(x)=f(g(x))=f(x^2+1)=\frac{1}{x^2+1}.$$

ومنه فإن $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$ و $\boxed{f\circ g(x)=\frac{1}{x^2+1}}$.

❖ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$ والدالة g معرفة على $\mathbb{R}$. الدالة $g\circ f$ تكون معرفة عندما تكون $f(x)$ معرفة. ومنه فإن: الدالة $g\circ f$ معرفة على $\mathbb{R}^*$.

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+1=\frac{1}{x^2}+1=\frac{1+x^2}{x^2}.$$

ومنه فإن $D_{g\circ f}=\mathbb{R}^*$ و $\boxed{g\circ f(x)=\frac{1+x^2}{x^2}}$.

حل التمرين 27:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{1}{x}$.

1) مجموعة تعريف الدالة $f\circ f$:

الدالة $f\circ f$ تكون معرفة عندما تكون الدالة f معرفة وعندما تكون $f(x)\neq 0$. ونعلم أن $f(x)=\frac{1}{x}$ أي أن $f(x)\neq 0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$. ومنه فإن: $\boxed{D_{f\circ f}=\mathbb{R}^*}$.

2) $f\circ f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$ ومنه فإن $\boxed{f\circ f(x)=x}$.

حل التمرين 28:

1) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2x^2+1}$.

❖ الدالة f هي دالة مركبة من الدالة c (الدالة "مربع") المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $c(x)=x^2$، متبوعة بالدالة التآلفية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=2x+1$، متبوعة بالدالة i (الدالة مقلوب) المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $i(x)=\frac{1}{x}$.

❖ $i\circ h\circ c(x)=i\big(h\big(c(x)\big)\big)=i\big(h\big(x^2\big)\big)=i(2x^2+1)=\frac{1}{2x^2+1}=f(x).$

❖ الدالة $i\circ h\circ c$ معرفة على $\mathbb{R}$، لأن $2x^2+1\neq 0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$. ومنه فإن: $\boxed{f=i\circ h\circ c}$.

2) الدالة g معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+3$.

❖ الدالة g هي دالة مركبة من الدالة r (الدالة "جذر مربع") المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $r(x)=\sqrt{x}$، متبوعة بالدالة i (الدالة مقلوب) المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $i(x)=\frac{1}{x}$، متبوعة بالدالة التآلفية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=2x+3$.

❖ $h\circ i\circ r(x)=h\big(i\big(r(x)\big)\big)=h\left(i\left(\sqrt{x}\right)\right)=h\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{2}{\sqrt{x}}+3=f(x).$

❖ الدالة r معرفة على $[0;+\infty[$، والدالة i معرفة على $\mathbb{R}^*$، ومنه فإن: الدالة $h\circ i\circ r$ معرفة على $]0;+\infty[$. ومنه فإن: $\boxed{f=h\circ i\circ r}$.

حل التمرين 29:

1)

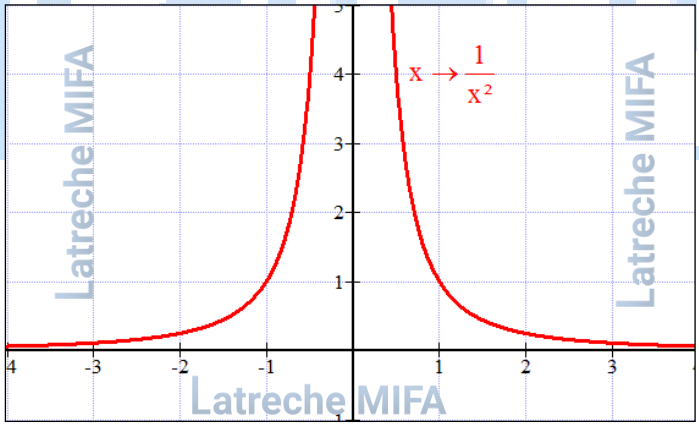
- الدالة "مربع" متناقصة على $]-\infty;0]$ ، ومتزايدة على $[0;+\infty[$.
- الدالة "مقلوب" متناقصة على $]-\infty;0[$ ، ومتناقصة على $]0;+\infty[$.
- الدالة التآلفية: $x \to ax+b$:
  - متزايدة على $\mathbb{R}$ عندما يكون: $a>0$.
  - متناقصة على $\mathbb{R}$ عندما يكون: $a<0$.
  - ثابتة على $\mathbb{R}$ عندما يكون: $a=0$.

2)دراسة الدالة: $x \to \frac{1}{x^2}$:

- الدالة $x \to \frac{1}{x^2}$ معرفة على $\mathbb{R}^*$. وهي دالة مركبة من الدالة "مربع" متبوعة بالدالة "مقلوب".
- اتجاه تغير الدالة $x \to \frac{1}{x^2}$ على المجال $]-\infty;0]$:
  - على المجال $]-\infty;0]$ ، الدالة "مربع" متناقصة، وتأخذ قيمها من المجال $[0;+\infty[$. (1)
  - وعلى المجال $[0;+\infty[$ ، الدالة "مقلوب" متناقصة. (2)
  - من (1) و(2) نستنتج أن الدالة $x \to \frac{1}{x^2}$ متزايدة على $]-\infty;0]$ (لأنها مركبة من دالتين متناقصتين).
- اتجاه تغير الدالة $x \to \frac{1}{x^2}$ على المجال $[0;+\infty[$:
  - على المجال $[0;+\infty[$ ، الدالة "مربع" متزايدة، وتأخذ قيمها من المجال $[0;+\infty[$. (3)
  - وعلى المجال $[0;+\infty[$ ، الدالة "مقلوب" متناقصة. (4)
  - من (3) و(4) نستنتج أن الدالة $x \to \frac{1}{x^2}$ متناقصة على $[0;+\infty[$ (لأنها مركبة من دالة متناقصة وأخرى متزايدة).

إذن الدالة $x \to \frac{1}{x^2}$ متزايدة على $]-\infty;0]$ ، ومتناقصة على $]0;+\infty[$.

الشكل المقابل يوضح صحة النتائج المتحصل عليها.



دراسة الدالة: $x \to \frac{1}{2x+3}$.

❖ الدالة $x \to \frac{1}{2x+3}$ معرفة عندما تكون $2x+3 \neq 0$ أي: $x \neq -\frac{3}{2}$. ومنه فإن: الدالة $x \to \frac{1}{2x+3}$ معرفة على $]-\infty;-\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2};+\infty[$.

❖ الدالة $x \to \frac{1}{2x+3}$ هي دالة مركبة من الدالة التآلفية $x \to 2x+3$ ، متبوعة بالدالة "مقلوب".

❖ اتجاه تغير الدالة $x \to \frac{1}{2x+3}$ على المجال $]-\infty;-\frac{3}{2}[$:

● على المجال $]-\infty;-\frac{3}{2}[$ ، الدالة التآلفية $x \to 2x+3$ متزايدة، وتأخذ قيمها من المجال $]-\infty;0[$ (لأن $x < -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x+3<0$). (1)

● وعلى المجال $]-\infty;0[$ ، الدالة "مقلوب" متناقصة. (2)

● من (1) و(2) نستنتج أن الدالة $x \to \frac{1}{2x+3}$ متناقصة على المجال $]-\infty;-\frac{3}{2}[$ (لأنها مركبة من دالة متناقصة وأخرى متزايدة).

❖ اتجاه تغير الدالة $x \to \frac{1}{2x+3}$ على المجال $]-\frac{3}{2};+\infty[$:

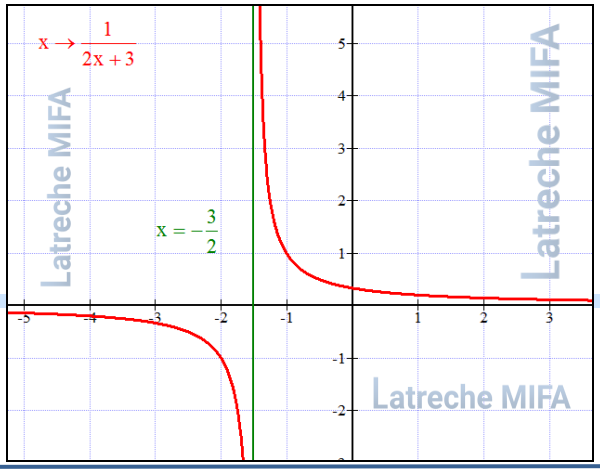
● على المجال $]-\frac{3}{2};+\infty[$ ، الدالة التآلفية $x \to 2x+3$ متزايدة، وتأخذ قيمها من المجال $]0;+\infty[$ (لأن $x > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x+3>0$). (1)

● وعلى المجال $]0;+\infty[$ ، الدالة "مقلوب" متناقصة. (2)

● من (1) و(2) نستنتج أن الدالة $x \to \frac{1}{2x+3}$ متناقصة على المجال $]-\frac{3}{2};+\infty[$ (لأنها مركبة من دالة متناقصة وأخرى متزايدة).

إذن الدالة $x \to \frac{1}{2x+3}$ متناقصة على $]-\infty;-\frac{3}{2}[$ ، ومتناقصة على $]-\frac{3}{2};+\infty[$.

الشكل الموالي يوضح صحة النتائج المتحصل عليها.



حل التمرين 30:

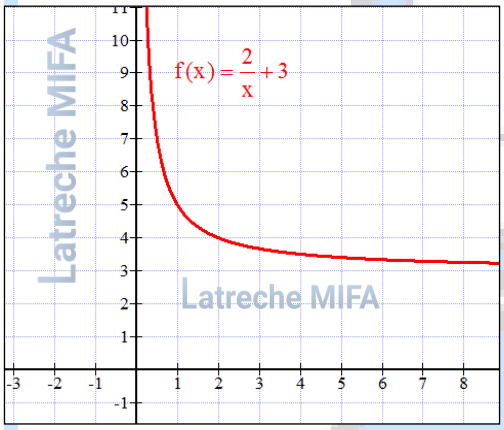
1) $f(x) = \frac{2}{x} + 3$ مع $I =]0;+\infty[$. لدينا: $f(x) = \frac{2}{x} + 3 = 2 \times \frac{1}{x} + 3$.

الدالة f مركبة من الدالة "مقلوب" متبوعة بالدالة التآلفية $x \to 2x+3$.

❖ على المجال $]0;+\infty[$ الدالة "مقلوب" متناقصة وتأخذ قيمها من المجال $]0;+\infty[$. (1).

❖ على المجال $]0;+\infty[$ الدالة التآلفية $x \to 2x+3$ متزايدة (لأن $2 > 0$). (2)

❖ من (1) و(2) نستنتج أن الدالة f متناقصة على المجال $]0;+\infty[$ (لأنها مركبة من دالة متناقصة وأخرى متزايدة).



الشكل المقابل يوضح صحة النتائج المتحصل عليها.

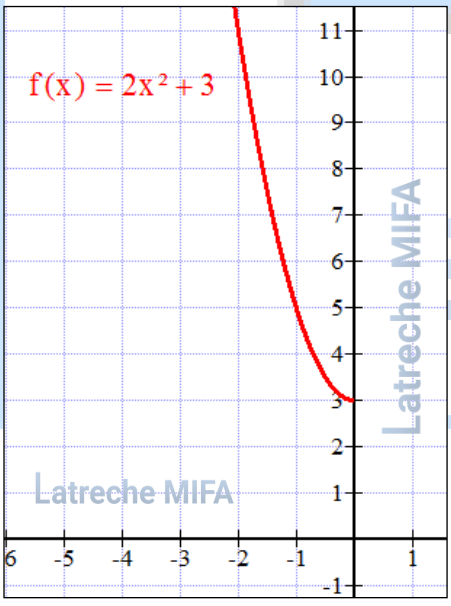
2) $f(x) = 2x^2 + 3$ مع $I =]-\infty;0]$.

الدالة f مركبة من الدالة "مربع" متبوعة بالدالة التآلفية $x \to 2x+3$.

❖ على المجال $]-\infty;0]$ الدالة "مربع" متناقصة وتأخذ قيمها من المجال $]0;+\infty[$. (1).

❖ على المجال $]0;+\infty[$ الدالة التآلفية $x \to 2x+3$ متزايدة (لأن $2 > 0$). (2)

❖ من (1) و(2) نستنتج أن الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ (لأنها مركبة من دالة متناقصة وأخرى متزايدة).



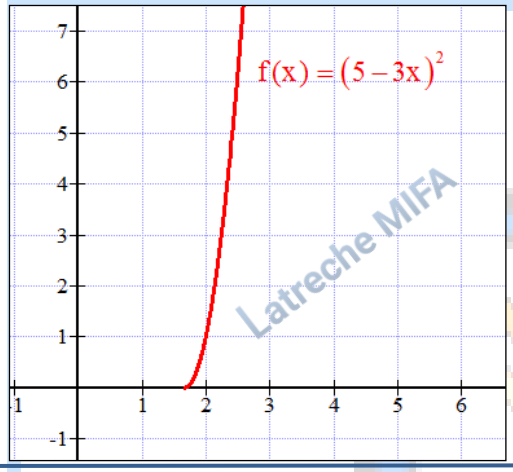
الشكل المقابل يوضح صحة النتائج المتحصل عليها.

3) $f(x)=(5-3x)^2$ مع $I=\left[\frac{5}{3};+\infty\right[$.

الدالة f مركبة من الدالة التآلفية $x\to 5-3x$ متبوعة بالدالة "مربع".

❖ على المجال $\left[\frac{5}{3};+\infty\right[$ الدالة التآلفية $x\to 5-3x$ متناقصة (لأن $-3<0$) وتأخذ قيمها من المجال $]-\infty;0]$. (لأن $x\geq\frac{5}{3}$ تعني $3x\geq 5$ أي $5-3x\leq 0$).

(1)



❖ على المجال $]-\infty;0]$ الدالة "مربع" متناقصة. (2)

❖ من (1) و(2) نستنتج أن الدالة f متزايدة على المجال $I=\left[\frac{5}{3};+\infty\right[$ (لأنها مركبة من دالتين متناقصتين).

الشكل المقابل يوضح صحة النتائج المتحصل عليها.

حل التمرين 31:

1) الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\frac{1}{9x^2-4}$ تكون معرفة عندما تكون $9x^2-4\neq 0$. ولدينا:

$9x^2-4=0$ معناه $(3x-2)(3x+2)=0$ أي $3x-2=0$ أو $3x+2=0$ أي $x=\frac{2}{3}$ أو $x=-\frac{2}{3}$.

ومنه فإن: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}$.

2) الدالة f مركبة من الدالة "مربع" متبوعة بالدالة التآلفية $x\to 9x-4$، متبوعة بالدالة "مقلوب".

❖ على المجال $\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[$:

- الدالة "مربع" متناقصة، وتأخذ قيمها من المجال $\left]\frac{4}{9};+\infty\right[$.
- على المجال $\left]\frac{4}{9};+\infty\right[$ الدالة التآلفية $x\to 9x-4$ متزايدة (لأن $9>0$) وتأخذ قيمها من المجال $]0;+\infty[$.
- على المجال $]0;+\infty[$ الدالة "مقلوب" متناقصة.
- من هنا نستنتج أن الدالة f مركبة من دالة متناقصة متبوعة بدالة متزايدة متبوعة بدالة متناقصة ومنه فإن: الدالة f متزايدة على المجال $\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[$.

❖ على المجال $\left]-\frac{2}{3};0\right]$:

- الدالة "مربع" متناقصة، وتأخذ قيمها من المجال $\left[0;\frac{4}{9}\right[$.
- على المجال $\left[0;\frac{4}{9}\right[$ الدالة التآلفية $x \to 9x-4$ متزايدة وتأخذ قيمها من المجال $]-4;0[$.
- على المجال $]-4;0[$ الدالة "مقلوب" متناقصة.
- من هنا نستنتج أن الدالة f مركبة من دالة متناقصة متبوعة بدالة متزايدة متبوعة بدالة متناقصة ومنه فإن: الدالة f متزايدة على المجال $\left]-\frac{2}{3};0\right]$.

❖ على المجال $\left[0;\frac{2}{3}\right[$:

- الدالة "مربع" متزايدة، وتأخذ قيمها من المجال $\left[0;\frac{4}{9}\right[$.
- على المجال $\left[0;\frac{4}{9}\right[$ الدالة التآلفية $x \to 9x-4$ متزايدة وتأخذ قيمها من المجال $]-4;0[$.
- على المجال $]-4;0[$ الدالة "مقلوب" متناقصة.

من هنا نستنتج أن الدالة f مركبة من دالة متزايدة متبوعة بدالة متزايدة متبوعة بدالة متناقصة ومنه فإن: الدالة f متناقصة على المجال $\left[0;\frac{2}{3}\right[$.

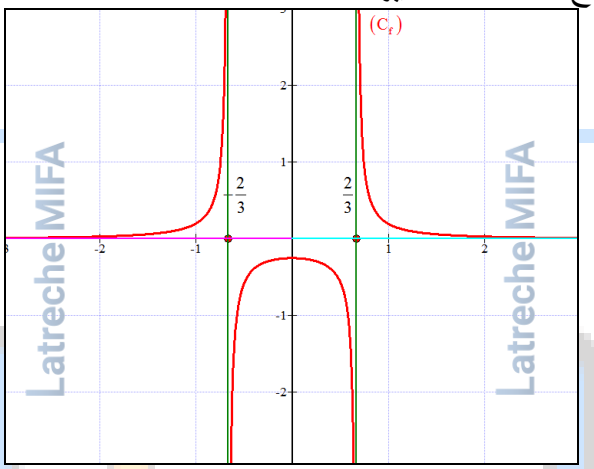
❖ على المجال $\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$:

- الدالة "مربع" متزايدة، وتأخذ قيمها من المجال $\left]\frac{4}{9};+\infty\right[$.
- على المجال $\left]\frac{4}{9};+\infty\right[$ الدالة التآلفية $x \to 9x-4$ متزايدة وتأخذ قيمها من المجال $]0;+\infty[$.
- على المجال $]0;+\infty[$ الدالة "مقلوب" متناقصة.

من هنا نستنتج أن الدالة f مركبة من دالة متزايدة متبوعة بدالة متزايدة متبوعة بدالة متناقصة ومنه فإن: الدالة f متناقصة على المجال $\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$.

خلاصة: الدالة f متزايدة على المجال $\left]-\frac{2}{3};0\right[\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$ ، ومتناقصة على المجال $\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup\left]0;\frac{2}{3}\right[$.

الشكل الموالي يبين صحة النتائج المتحصل عليها.



تمّ بحمد الله وتوفيقه

Latreche MIFA