المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية

I. المعادلات من الدرجة الثانية:

1. المعادلة من الدرجة الثانية:

نسمي معادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل:
$ax^2+bx+c=0$. حيث: a ، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

2. حل معادلة من الدرجة الثانية:

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x التالية: $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$.
باستعمال الشكل النموذجي لثلاثي الحدود ax^2+bx+c يمكن الحصول على الجدول التالي:

إذا كان:	حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$ هي:	يتم تحليل ax^2+bx+c على الشكل التالي:
$\Delta<0$	لا توجد حلول	لا يمكن تحليل ax^2+bx+c
$\Delta=0$	$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$ (حل مضاعف)	$a(x-x_1)^2$
$\Delta>0$	$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$

مثال:

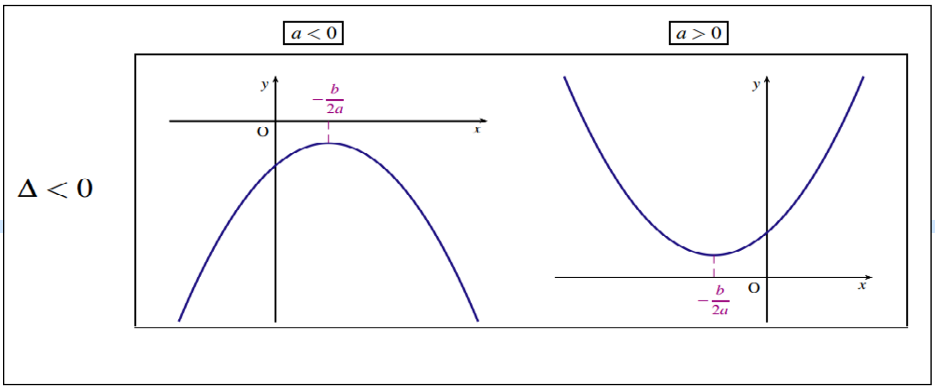
حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $6x^2-7x-3=0$.

❖ $a=6$ ، $b=-7$ و $c=-3$ ومنه فإن: $\Delta=(-7)^2-4\times6\times(-3)=121>0$

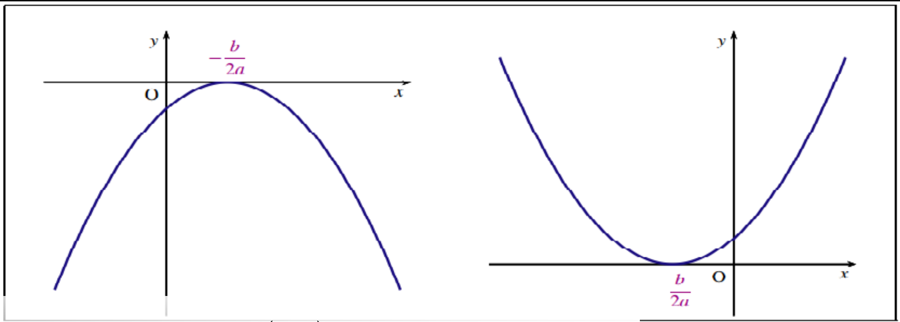
❖ بما أن $\Delta>0$ ، فإن: المعادلة $6x^2-7x-3=0$ تقبل حلين مختلفين هما:
$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{7+\sqrt{121}}{12}=\dfrac{3}{2}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{7-\sqrt{121}}{12}=-\dfrac{1}{3}$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $6x^2-7x-3=0$ هي: $\boxed{S=\left\{-\dfrac{1}{3};\dfrac{3}{2}\right\}}$.

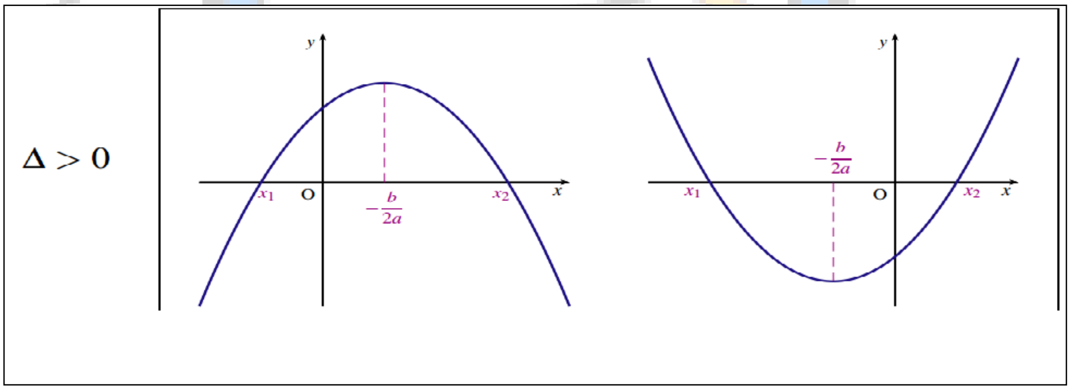
3. الترجمة البيانية لحلول معادلة من الدرجة الثانية:



$\Delta = 0$



محور الفواصل هو مماس لـ $\left(C_f\right)$ في النقطة التي فاصلتها $-\frac{b}{2a}$



ملاحظة:

حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تسمى أيضا جذور ثلاثي الحدود ax^2+bx+c .

4. المميز المختصر Δ':

في معادلة من الدرجة الثانية من الشكل $ax^2+bx+c=0$ ، عندما يكون المعامل b عدد زوجي، يفضل استعمال المميز المختصر Δ' .

من أجل ذلك نفرض $b=2b'$ و عندها يكون: $\Delta'=b'^2-ac$.

حلول المعادلة تكون عندها معطاة بالقاعدة: $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$.

مثال:

لتكن المعادلة $x^2-8x+4=0$.

❖ لدينا: $a=1$، $b=-8$ و $c=4$. نفرض أن $b=2b'$ ومنه فإن: $b'=\frac{b}{2}=-4$.

❖ $\Delta'=(-4)^2-1\times4=16-4=12$. $\Delta'>0$ معناه يوجد حلين مختلفين هما:

$x_1=\frac{4+\sqrt{12}}{1}=4+2\sqrt{3}$ و $x_2=\frac{4-\sqrt{12}}{1}=4-2\sqrt{3}$.

II. مجموع وجداء حلي معادلة من الدرجة الثانية:

1. مجموع وجداء حلي معادلة من الدرجة الثانية:

❖ مجموع حلي معادلة من الدرجة الثانية هو $S=-\frac{b}{a}$.

❖ جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية هو $P=\frac{c}{a}$.

برهان:

حلا المعادلة $ax^2+bx+c=0$ هما: $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$، حيث: $\Delta=b^2-4ac$ ومنه فإن:

❖ $S=x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{a}$.

❖ $P=x_1\times x_2=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{(2a)^2}$

$=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$.

2. حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر:

إذا علم أحد الحلين، يمكن حساب الآخر، وذلك باستعمال المجموع S أو الجداء P.

ملاحظة:

بعض المعادلات من الدرجة الثانية يكون لها حل "ظاهر". في هذه الحالة استعمال مجموع وجداء الحلين يكون أسرع طريقة لإيجاد الحل الثاني.

أمثلة:

المثال 1: لتكن المعادلة $x^2+2x-3=0$. نلاحظ أن $x_1=1$ هو حل لهذه المعادلة $(1^2+2\times1-3=0)$.

جداء حلي هذه المعادلة $P=-\frac{3}{1}=-3$، ومنه يمكن استنتاج أن الحل الآخر هو $x_2=-3$.

المثال 2: لتكن المعادلة $3x^2+x-14=0$. نلاحظ أن $x_1=2$ هو حل لهذه المعادلة $(3\times2^2+2-14=0)$.

مجموع حلي هذه المعادلة $S=-\frac{1}{3}$، ومنه يمكن استنتاج أن الحل الآخر هو:

$x_2=-\frac{1}{3}+2=-\frac{7}{3} \Leftrightarrow 2+x_2=-\frac{1}{3}$ أي $x_2=-\frac{7}{3}$.

3. تعيين عددين علم مجموعهما وجداؤهما:

يكون مجموع عددين هو S، وجداؤهما هو P إذا وفقط إذا كانا حلين للمعادلة ذات المجهول x:

$x^2-Sx+P=0$

مثال:

أوجد عددين مجموعهما 18 وجداؤهما 65.

- ❖ لدينا: $x_1+x_2=18$ و $x_1\times x_2=65$. إذن x_1 و x_2 هما حلان للمعادلة: $x^2-18x+65=0$.
- ❖ $\Delta=18^2-4\times1\times65=64=8^2$.
- ❖ $\Delta>0$، ومنه فإن المعادلة $x^2-18x+65=0$ تقبل حلين هما: $x_1=\frac{18+8}{2}=13$ و $x_2=\frac{18-8}{2}=5$.

4. تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية:

لتكن المعادلة من الدرجة الثانية $ax^2+bx+c=0$ مع $a\neq0$. Δ مميزها، جداء حليها P، ومجموع حليها S.

- ❖ إذا كان $P<0$، فإن: $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين إشارتهما مختلفتين.
- ❖ إذا كان $P>0$ و $\Delta>0$ و $S>0$، فإن: $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين موجبين تماما.

إذا كان $P>0$ و $\Delta>0$ و $S<0$، فإن: $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين سالبين تماما.

أمثلة:

المثال 1: لتكن المعادلة $x^2-8x+15=0$. (1)

- ❖ $a=1$، $b=-8$ و $c=15$.
- ❖ $\Delta=(-8)^2-4\times1\times15=64-60=4$. $\Delta>0$ معناه أن (1) تقبل حلين مختلفين.
- ❖ $P=\frac{c}{a}=15>0$. معناه أن الحلين لهما نفس الإشارة.
- ❖ $S=-\frac{b}{a}=8>0$. معناه أن الحلين موجبين.
- ❖ بالفعل لدينا: $x_1=\frac{8+2}{2}=5$ و $x_2=\frac{8-2}{2}=3$.

المثال 2: لتكن المعادلة $4x^2+11x+6=0$. (2)

- ❖ $\Delta=(11)^2-4\times4\times6=121-96=25$. $\Delta>0$ معناه أن (2) تقبل حلين مختلفين.

❖ $P=\frac{c}{a}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}>0$. معناه أن الحلين لهما نفس الإشارة.

❖ $S=-\frac{b}{a}=-\frac{11}{4}<0$. معناه أن الحلين سالبين.

❖ بالفعل لدينا: $x_1=\frac{-11+5}{8}=-\frac{3}{4}$ و $x_2=\frac{-11-8}{8}=-2$.

المثال 3: لتكن المعادلة $2x^2-5x-3=0$. (3)

❖ $\Delta=(-5)^2-4\times2\times(-3)=25+24=49$. $\Delta>0$ معناه أن (3) تقبل حلين مختلفين.

❖ $P=\frac{c}{a}=-\frac{3}{2}<0$. معناه أن الحلين لهما إشارة مختلفة.

❖ $S=-\frac{b}{a}=\frac{5}{2}>0$. معناه أن الحل الذي قيمته المطلقة أكبر هو موجب.

❖ بالفعل لدينا: $x_1=\frac{5+7}{4}=3$ و $x_2=\frac{5-7}{4}=-\frac{1}{2}$.

المثال 4: لتكن المعادلة $4x^2+25x-21=0$. (4)

❖ $\Delta=(25)^2-4\times4\times(-21)=625+336=961$. $\Delta>0$ معناه أن (4) تقبل حلين مختلفين.

❖ $P=\frac{c}{a}=-\frac{21}{4}<0$. معناه أن الحلين لهما إشارة مختلفة.

❖ $S=-\frac{b}{a}=-\frac{25}{4}<0$. معناه أن الحل الذي قيمته المطلقة أكبر هو سالب.

❖ بالفعل لدينا: $x_1=\frac{-25+31}{8}=\frac{3}{4}$ و $x_2=\frac{-25-31}{8}=-7$.

5. المعادلات من الدرجة الثانية بوسيط حقيقي مع $a\neq0$:

نسمي معادلة من الدرجة الثانية بوسيط حقيقي m، كل معادلة ذات المجهول x مع $a\neq0$، والتي يكون، على الأقل، أحد معامليها معبر عنه بدلالة m.

في هذه الحالة، ندرس وجود وإشارة حلول المعادلة حسب قيم الوسيط الحقيقي m.

مثال:

لتكن المعادلة $(E_m):(m-1)x^2-2mx+m+3=0$.

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة (E_m).

❖ لدينا: $a=m-1$، $b=-2m$ و $c=m+3$.

❖ عندما يكون $m=1$، (E_m) تكون معادلة من الدرجة الأولى $-2x+4=0$ ومنه فإن: $\boxed{x=2}$.

❖ عندما يكون $m\neq1$، المعادلة (E_m) من الدرجة الثانية. نحسب عندئذ مميزها بدلالة m.

$$\Delta = 4m^2 - 4(m-1)(m+3)$$
$$= 4(m^2 - m^2 - 3m + m + 3)$$
$$= 4(-2m+3)$$

عدد حلول المعادلة (E_m) يختلف حسب إشارة Δ. يجب إذن دراسة إشارة Δ. الجدول الموالي يوضح عدد حلول (E_m) بدلالة m:

m	$-\infty$	1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Δ	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$
عدد حلول (E_m)	حلين x_1 و x_2	$x=2$	حلين x_1 و x_2	حل مضاعف x_0	لا توجد حلول

❖ $m = \frac{3}{2}$ معناه $\Delta = 0$. أي يوجد حل مضاعف x_0 حيث: $\boxed{x_0 = \frac{m}{m-1}}$.

❖ $m \in \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ معناه $\Delta < 0$. أي لا توجد حلول.

❖ $m \in]-\infty;1[\cup \left]1;\frac{3}{2}\right[$ معناه $\Delta > 0$. أي يوجد حلان مختلفان x_1 و x_2. حيث:

$\boxed{x_1 = \frac{m-\sqrt{-2m+3}}{m-1} \text{ و } x_2 = \frac{m+\sqrt{-2m+3}}{m-1}}$.

III. المتراجحات من الدرجة الثانية:

1. المتراجحة من الدرجة الثانية:

نسمي متراجحة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الأشكال التالية:

$ax^2+bx+c \geq 0$ ، $ax^2+bx+c > 0$ ، $ax^2+bx+c \leq 0$ أو $ax^2+bx+c < 0$

حيث: a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.

طريقة:

يعود حل متراجحة من الشكل $ax^2+bx+c \geq 0$ ، $ax^2+bx+c > 0$ ، $ax^2+bx+c \leq 0$ أو $ax^2+bx+c < 0$ إلى دراسة إشارة ثلاثي الحدود ax^2+bx+c.

2. إشارة ثلاثي الحدود ax^2+bx+c مع $a\neq 0$:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. و Δ مميزها.

- ❖ عندما يكون $\Delta<0$، فإن $f(x)$ من إشارة a من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.
- ❖ عندما يكون $\Delta=0$، فإن $f(x)$ من إشارة a من أجل كل $x\neq -\frac{b}{2a}$.
- ❖ عندما يكون $\Delta>0$ و $x_1;x_2$ جذري ثلاثي الحدود $f(x)$ مع $x_1<x_2$، فإن $f(x)$ من إشارة a من أجل كل $x\in]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$، و $f(x)$ عكس إشارة a من أجل كل $x\in]x_1;x_2[$.

ملاحظة: من أجل $\Delta>0$، يمكن حفظ القاعدة التالية: "$f(x)$ من إشارة a خارج الجذرين، وعكس إشارة a داخل الجذرين".

أمثلة:

المثال 1: حل المتراجحة $-\frac{x^2}{4}-x+3\leq 0$.

- ❖ لندرس إشارة ثلاثي الحدود $-\frac{x^2}{4}-x+3$.
- ❖ مميز ثلاثي الحدود $\Delta=(-1)^2-4\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times 3=4>0$، ومنه فإن: ثلاثي الحدود له جذران هما:

$$x_1=\frac{1-2}{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{-1}{-\frac{1}{2}}=2 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{1+2}{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{3}{-\frac{1}{2}}=-6$$

- ❖ إشارة ثلاثي حدود هي "من إشارة a خارج الجذرين، وعكس إشارة a داخل الجذرين" ومنه فإن:

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
إشارة ثلاثي الحدود $-\frac{x^2}{4}-x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

مجموعة حلول المعادلة $-\frac{x^2}{4}-x+3\leq 0$ هي: $\boxed{S=]-\infty;-6[\cup]2;+\infty[}$.

المثال 2: نريد دراسة موقع (C) الذي معادلته $y=x^2$ من المستقيم D الذي معادلته $y=2x-3$.

- ❖ نستنتج موقع (C) من D بدراسة إشارة:

$$x^2-(2x-3)=x^2-2x+3$$

- ❖ Δ مميز ثلاثي الحدود x^2-2x+3 ومنه فإن: $\Delta=(-2)^2-4\times1\times3=-8<0$.
- ❖ وبما أن $\Delta<0$، فإن ثلاثي الحدود x^2-2x+3 من إشارة a. أي $x^2-2x+3>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، أي $x^2>2x-3$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، ومنه فإن: $\boxed{(C)\text{ يقع فوق المستقيم } D \text{ دائما}}$.

IV. المعادلات والمتراجحات مضاعفة التربيع:

1. المعادلات مضاعفة التربيع:

نسمي معادلة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل:
$ax^4+bx^2+c=0$ حيث: a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

طريقة:

نضع $X=x^2$ ونحل المعادلة $aX^2+bX+c=0$ (يسمى المجهول X مجهولا مساعدا). بعدها نستنتج حلول المعادلة $ax^4+bx^2+c=0$.

أمثلة:

المثال 1: لتكن المعادلة $x^4-25x^2+144=0$ (1)

- نضع $X=x^2$ فنتحصل على $X^2-25X+144=0$ (2)
- حلول المعادلة (2) هي: $X_1=16$ و $X_2=9$.
  - $X_1=16$ معناه: $x_1=4$ و $x_2=-4$.
  - $X_2=9$ معناه: $x_3=3$ و $x_4=-3$.
- مجموعة حلول المعادلة (1) هي: $\boxed{S=\{-4;-3;3;4\}}$.

المثال 2: لتكن المعادلة $x^4-12x^2-64=0$ (1)

- نضع $X=x^2$ فنتحصل على $X^2-12X-64=0$ (2)
- حلول المعادلة (2) هي: $X_1=16$ و $X_2=-4$.
  - $X_1=16$ معناه: $x_1=4$ و $x_2=-4$.
  - $X_2=-4<0$ فإنه لا يمكن إيجاد حلول للمعادلة (2) في هذه الحالة.
- مجموعة حلول المعادلة (1) هي: $\boxed{S=\{-4;4\}}$.

2. المتراجحات مضاعفة التربيع:

نسمي متراجحة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الأشكال التالية:
$ax^4+bx^2+c\geq 0$ ، $ax^4+bx^2+c>0$ ، $ax^4+bx^2+c\leq 0$ أو $ax^4+bx^2+c<0$
حيث: a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

طريقة:

يعود حل متراجحة من الشكل $ax^4+bx^2+c\geq 0$ إلى دراسة إشارة ax^4+bx^2+c وذلك بـ:

- ❖ وضع $X=x^2$ وحل المعادلة $aX^2+bX+c=0$.
- ❖ استنتاج حلول المعادلة $ax^4+bx^2+c=0$.
- ❖ تحليل المعادلة $ax^4+bx^2+c=0$ على الشكل $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$.
- ❖ تشكيل جدول يوضح إشارة كل من $(x-x_1)$، $(x-x_2)$، $(x-x_3)$، $(x-x_4)$، واستنتاج إشارة ax^4+bx^2+c.
- ❖ حل المتراجحة $ax^4+bx^2+c\geq 0$.

مثال:

حل المتراجحة $2x^4-9x^2+4<0$. (1)

❖ نضع $X=x^2$ فنتحصل على $2X^2-9X+4=0$ (2)

❖ حلول المعادلة (2) هي: $X_1=\frac{1}{2}$ و $X_2=4$.

- معناه: $X_1=\frac{1}{2}$ معناه: $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $X_2=4$ معناه: $x_3=2$ و $x_4=-2$.
- حلول المعادلة $2x^4-9x^2+4=0$ هي: $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$، $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$، $x_3=2$ و $x_4=-2$.

❖ نحلل $2x^4-9x^2+4$ فنتحصل على: $2x^4-9x^2+4=2(x+2)\left(x+\sqrt{2}/2\right)\left(x-\sqrt{2}/2\right)(x-2)$.

x	$-\infty$ -2	-2 $-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$ $\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$ 2	2 $+\infty$
$x+2$	-	+	+	+	+
$x+\sqrt{2}/2$	-	-	+	+	+
$x-\sqrt{2}/2$	-	-	-	+	+
$x-2$	-	-	-	-	+
$2x^4-9x^2+4$	+	-	+	-	+

❖ مجموعة حلول المتراجحة (1) هي: $\boxed{S=\left]-2;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{2}}{2};2\right[}$.

V. المعادلات والمتراجحات المختلفة:

1. إشارة كثير حدود مكتوب على شكل جداء:

لمعرفة إشارة كثير حدود مكتوب على شكل جداء، ندرس إشارة كل حد على حدة ثم نستنتج إشارة كثير الحدود من خلال جدول إشارة نطبق فيه قواعد الإشارات.

أمثلة:

المثال 1: أدرس إشارة $f(x)=(2x+6)(-3x+9)(4x+8)$.

- ❖ $2x+6=0 \Leftrightarrow x=-3.$
- ❖ $-3x+9=0 \Leftrightarrow x=3.$
- ❖ $4x+8=0 \Leftrightarrow x=-2$.

❖ ومنه نشكّل جدول الإشارات التالي:

x	$-\infty$		-3		-2		3		$+\infty$
$2x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-3x+9$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x+8$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

المثال 2: أدرس إشارة $P(x)=(x-1)(x^2-2x-3)$.

- ❖ $x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$
- ❖ $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1\ \ 3 \qquad -=x.$

❖ ومنه نشكّل جدول الإشارات التالي:

x		-1		1		3	
$x-1$	-		-	0	$+$		$+$
x^2-2x-3	$+$	0	-		-	0	$+$
$P(x)$	-	0	$+$	0	-	0	$+$

2. المتراجحات المكتوبة على شكل جداء:

حل متراجحة مكتوبة على شكل جداء يتمثل في دراسة إشارة كثير الحدود أولا، ثم تحديد مجموعة حلول المتراجحة.

مثال:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $(x-1)(x^2-2x-3)\geq 0$.

❖ في الفقرة السابقة، قمنا بدراسة إشارة $P(x)$. ومنه يمكن القول أن مجموعة حلول المتراجحة $P(x)$ هو:

$\boxed{S=[-1;1]\cup[3;+\infty[}$.

3. إشارة كثير حدود مكتوب على شكل حاصل قسمة:

لمعرفة إشارة كثير حدود مكتوب على شكل حاصل قسمة، يجب أولا تحديد مجموعة تعريف كثير الحدود، ثم دراسة إشارة البسط والمقام، بعد ذلك تستنتج إشارة كثير الحدود من خلال جدول إشارة تطبق فيه قواعد الإشارات.

أمثلة:

المثال 1: أدرس إشارة $F(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x^2+x-6}$.

❖ $F(x)$ معرف من أجل $x^2+x-6\neq 0$ أي من أجل $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;2\}$.

❖ $x^2+3x-2=0$ معناه $x=-2$ أو $x=1$.

❖ ومنه نشكّل جدول الإشارات التالي:

x	-3 $\quad$ -2 $\quad$ 1 $\quad$ 2
x^2+3x-2	+ $\mid$ + 0 - 0 + $\mid$ +
x^2+x-6	+ 0 - $\mid$ - $\mid$ - 0 +
$F(x)$	+ ‖ - 0 + 0 - ‖ +

المثال 2: أدرس إشارة $f(x)=\dfrac{-x+5}{2x-8}$.

❖ $f(x)$ معرف من أجل $2x-8\neq 0$ أي من أجل $x\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

❖ $-x+5=0$ معناه $x=5$.

❖ ومنه نشكّل جدول الإشارات التالي:

x	$-\infty$ $\quad$ 4 $\quad$ 5 $\quad$ $+\infty$
$-x+5$	+ $\mid$ + 0 −
$2x-8$	− 0 + $\mid$ +
$f(x)$	− ‖ + 0 −

4. المتراجحات المكتوبة على شكل حاصل قسمة:

حل متراجحة مكتوبة على شكل حاصل قسمة، يتمثل في تحديد مجموعة تعريف كثير الحدود أولا، ثم دراسة إشارة كثير الحدود، وبعد ذلك تحديد مجموعة حلول المتراجحة.

مثال:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $\dfrac{-x+5}{2x-8}<0$.

❖ في الفقرة السابقة، قمنا بدراسة إشارة $f(x)$. ومنه يمكن القول أن مجموعة حلول المتراجحة $f(x)$ هو: $\boxed{S=]-\infty;4[\cup]5;+\infty[}$.

5. المعادلات المتضمنة جذر مربع:

المعادلة المتضمنة جذر مربع لها أنواع مختلفة، لكن حلها يعود دائما إلى:
- ❖ إيجاد مجموعة تعريف المعادلة،
- ❖ عزل (إن أمكن) الجذر المربع في جهة واحدة من المعادلة،
- ❖ تربيع حدي المعادلة.
- ❖ التحقق من أن الحلول تنتمي إلى مجموعة تعريف المعادلة.

طرق:

بعد تحديد مجموعة تعريف كل معادلة:
- ❖ حل المعادلة $\sqrt{ax^2+bx+c}=0$ يعود لحل المعادلة $ax^2+bx+c=0$.
- ❖ حل المعادلة $ax+b=\sqrt{cx+d}$ يعود لحل المعادلة $(ax+b)^2=cx+d$.
- ❖ حل المعادلة $ax+b=\sqrt{cx^2+dx+e}$ يعود لحل المعادلة $(ax+b)^2=cx^2+dx+e$.
- ❖ حل المعادلة $\sqrt{dx^2+ex+f}=\sqrt{ax^2+bx+c}$ تعود لحل المعادلة $ax^2+bx+c=dx^2+ex+f$.

أمثلة:

المثال 1: حل المعادلة $\sqrt{2x^2+4x-6}=2x-1$. (1)

❖ المعادلة (1) معرفة عندما يكون $2x^2+4x-6\geq 0$. إذن لندرس إشارة $2x^2+4x-6$. (2)
- ليكن Δ' مميز (2). $\Delta'=64>0$. ومنه فإن: (2) له جذران مختلفان هما: $x_1=-3$ و $x_2=1$.
- ومنه جدول إشارة (2) يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$2x^2+4x-6$		+	0	-	0	+	

- ومنه مجموعة تعريف (1) يكون: $\boxed{D=]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[}$.

❖ من أجل كل $x\in D$ ، لدينا:

$$\sqrt{2x^2+4x-6}=2x-1$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+4x-6=(2x-1)^2$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+4x-6=4x^2-4x+1$$
$$\Leftrightarrow -2x^2+8x-7=0$$

إذن حل المعادلة (1) يؤول إلى حل المعادلة $-2x^2+8x-7=0$. (3)

❖ ليكن Δ مميز ثلاثي الحدود $-2x^2+8x-7$. $\Delta=8>0$ ومنه فإن: (3) لها حلين مختلفين هما: $x_1=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $x_2=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

❖ لدينا: $x_1=2+\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 2,707$ أي $x_1\in D$، و $x_2=2-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1,293$ أي $x_2\in D$. ومنه فإن: $\boxed{S=\left\{2-\frac{\sqrt{2}}{2};2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}}$.

<u>المثال 2:</u> حل المعادلة $\sqrt{x+12}=\sqrt{x^2+2x-8}$. (1)

❖ المعادلة (1) معرفة عندما يكون $\begin{cases}x+12\geq 0\\ x^2+2x-8\geq 0\end{cases}$. (2)

- $x+12\geq 0$ معناه $x\geq -12$.
- نلاحظ أن $x_1=2$ هي حل للمتراجحة $x^2+2x-8\geq 0$ لأن: $2^2+2\times 2-8=0$، ولدينا: $P=x_1\times x_2=-8$ ومنه فإن: $x_2=-4$.
- بما أن $a=1$، فإن: $x^2+2x-8\geq 0$ عندما يكون: $x\in]-\infty;-4]\cup[2;+\infty[$.
- (2) يؤول إلى: $\begin{cases}x\geq -12\\ x\in]-\infty;-4[\cup]2;+\infty[\end{cases}$ ومنه فإن: $\boxed{D=[-12;-4]\cup[2;+\infty[}$.

❖ من أجل كل $x\in D$، لدينا: $x+12=x^2+2x-8$ أي $-x^2-x+20=0$ (3)

- حل المعادلة (1) يؤول إلى حل المعادلة (3).
- نحسب: $\Delta=81>0$، معناه أن (3) تقبل حلين هما: $x_1=-5$ أي $x_1\in D$، و $x_2=4$ أي $x_2\in D$.

❖ ومنه فإن: $\boxed{S=\{-5;4\}}$.

6. المتراجحات المتضمنة جذر مربع:

أ. <u>المتراجحات من الشكل</u> $\sqrt{A(x)}>\sqrt{B(x)}$:

حل متراجحة من الشكل $\sqrt{A(x)}>\sqrt{B(x)}$، حيث $A(x)$ و $B(x)$ كثيرا حدود، يعود إلى حل الجملة التالية: $\begin{cases}A(x)>B(x)\\ B(x)\geq 0\end{cases}$.

<u>مثال:</u>

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $\sqrt{2x-1}>\sqrt{x-4}$. (1)

❖ (1) تؤول إلى $\begin{cases}2x-1>x-4\\ x-4\geq 0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x>-3\\ x\geq 4\end{cases}$ معناه $x\geq 4$ ومنه فإن: $\boxed{S=[4;+\infty[}$.

ب. المتراجحة من الشكل $\sqrt{A(x)} > B(x)$:

حل متراجحة من الشكل $\sqrt{A(x)} > B(x)$، حيث $A(x)$ و $B(x)$ كثيرا حدود، يعود إلى حل الجملتين التاليتين: $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > (B(x))^2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) > 0 \end{cases}$.

أمثلة:

المثال 1: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $\sqrt{2-x} > x+4$. (1)

❖ (1) تؤول إلى $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2-x > (x+4)^2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x+4 < 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} x \geq -4 \\ 2-x > x^2+8x+16 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x < -4 \\ x \leq 2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x \geq -4 \\ x^2+9x+14 > 0 \end{cases}$ أو $x < -4$.

❖ ثلاثي الحدود $x^2+9x+14$ مميزه $\Delta = 25$ وله حلان مختلفان هما -2 و -7.

ومنه فإن: (1) تؤول إلى $\begin{cases} x \geq -4 \\ -7 < x < -2 \end{cases}$ أو $x < -4$ أي $-4 \leq x < -2$ أو $x < -4$

❖ ومنه فإن: $\boxed{S =]-\infty;-2[}$.

المثال 2: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $\sqrt{x+1} \geq 5-x$. (1)

❖ (1) تؤول إلى $\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x+1 \geq (5-x)^2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} 5-x \leq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$

❖ لنحل كل جملة على حدة:

- $\begin{cases} 5-x \leq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ تؤول إلى $\begin{cases} x \geq 5 \\ x \geq -1 \end{cases}$ أي $x \geq 5$ ومنه فإن: $S_1 = [5;+\infty[$.
- $\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x+1 \geq (5-x)^2 \end{cases}$ تؤول إلى $\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -1 \\ x^2-11x+24 \leq 0 \end{cases}$ (2)
- ثلاثي الحدود $x^2-11x+24$ مميزه $\Delta = 25$ وله حلان مختلفان هما 3 و 8.
- ومنه جدول إشارة (2) يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1		3		5		8		$+\infty$
$5-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x^2-11x+24$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

● ومنه فإن: $S_2 =]3;5]$.

❖ مجموعة حلول (1) هي: $\boxed{S = S_1 \cup S_2 =]3;+\infty[}$.

ج. **المتراجحة من الشكل** $\sqrt{A(x)} < B(x)$:

حل متراجحة من الشكل $\sqrt{A(x)} < B(x)$، حيث $A(x)$ و $B(x)$ كثيرا حدود، يعود إلى حل الجملة التالية: $\begin{cases} A(x) < (B(x))^2 \\ A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$.

مثال:

حل المتراجحة التالية: $\sqrt{x+1} < x+3$. (1)

❖ (1) تؤول إلى $\begin{cases} x+1 < (x+3)^2 \\ x+1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x+1 < x^2+6x+9 \\ x \geq -1 \\ x \geq -3 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} x^2+5x+8 > 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$

❖ ثلاثي الحدود x^2+5x+8 مميزه $\Delta = -7 < 0$ و $a = 1 > 0$، إذن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $x^2+5x+8 > 0$. ومنه فإن: $\boxed{S = [-1;+\infty[}$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه