حلول تمارين درس المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية

فهرس حلول التمارين

حل التمرين 1:

1) المعادلة $350x^2-3x-27{,}5=0$ تقبل حلين حقيقيين مختلفين. صحيح لأن في هذه الحالة:
$\Delta=(-3)^2-4\times350(-27{,}5)=38509>0$.

2) ثلاثي الحدود x^2-6x+9 موجب تماما من أجل كل $x\in\mathbb{R}$. خطأ لأن $x^2-6x+9=(x-3)^2$. وهو كثير حدود ينعدم من أجل $x=3$.

3) إذا ضاعفنا كل معاملات معادلة من الدرجة الثانية، فإن حلولها تكون هي الأخرى مضاعفة. خطأ لأن المعادلة $2ax^2+2bx+2c=0$ تؤول إلى $2(ax^2+bx+c)=0$ أي $ax^2+bx+c=0$.

4) المعادلة $x^2+15=0$ ليس لها حلول. صحيح لأنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا $x^2\geq0$ ومنه فإن:
$x^2+15\geq15>0$.

حل التمرين 2:

1) x^2-5x-6 ثلاثي حدود مع $a=1\ ;\ b=-5\ ;\ c=-6$، إذن: $\Delta=(-5)^2-4\times1\times(-6)=49$.
$\Delta>0$ معناه أن ثلاثي الحدود x^2-5x-6 يقبل جذرين مختلفين x_1 و x_2 حيث:

$$x_2=\frac{-(-5)-7}{2\times1}=-1 \text{ و } x_1=\frac{-(-5)+7}{2\times1}=6$$

ومنه فإن: مجموعة حلول المعادلة $x^2-5x-6=0$ هي: $S=\{-1;6\}$.

2) $\Delta=3^2-4(-2)(-1)=1>0\Rightarrow x_1=\frac{-3+1}{2(-2)}=\frac{1}{2}\ ;\ x_2=\frac{-3-1}{2(-2)}=1$.

ومنه فإن: مجموعة حلول المعادلة $-2x^2+3x-1=0$ هي: $S=\left\{\frac{1}{2};1\right\}$.

3) $\Delta=(-3)^2-4\times3\times2=-15<0$.

ومنه فإن: مجموعة حلول المعادلة $3x^2-3x+2=0$ هي: $S=\varnothing$.

حل التمرين 3:

1) P ثلاثي حدود معرف بـ: $P(x):x^2-4x+a$ مع $a\in\mathbb{R}$.

❖ يكون للمعادلة $P(x)=0$ حلان مختلفان إذا وفقط إذا كان $\Delta>0$، ولدينا:

$$\Delta=(-4)^2-4\times1\times a=16-4a=4(4-a)$$
$$\Delta>0\Leftrightarrow4(4-a)>0\Leftrightarrow4-a>0\Leftrightarrow a<4\ \ (1)$$

عندها يكون للمعادلة $P(x)=0$ حلان مختلفان هما x_1 و x_2، ويكون لدينا:

$$x^2-4x+a=(x-x_1)(x-x_2)$$

❖ للمعادلة $P(x)=0$ حلان مختلفان محصوران بين 1 و 5 معناه من جهة:

$$\begin{cases}x_1>1\\x_2>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x_1<-1\\-x_2<-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x_1<0\\1-x_2<0\end{cases}\Leftrightarrow(1-x_1)(1-x_2)>0\ (2)$$

ومعناه من جهة أخرى:

$$\begin{cases}x_1<5\\x_2<5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x_1>-5\\-x_2>-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5-x_1>0\\5-x_2>0\end{cases}\Leftrightarrow(5-x_1)(5-x_2)>0\,(3)$$

من (1)، (2) و(3) نستنتج أنه يكون للمعادلة $P(x)=0$ حلان مختلفان محصوران بين 1 و 5 إذا وفقط إذا كان لدينا:

$$\begin{cases} a<4 \\ (1-x_1)(1-x_2)>0 \\ (5-x_1)(5-x_2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<4 \\ (1-x_1)(1-x_2)>0 \\ (5-x_1)(5-x_2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<4 \\ 1-x_2-x_1+x_1x_2>0 \\ 25-5x_2-5x_1+x_1x_2>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<4 \\ 1-(x_1+x_2)+x_1x_2>0 \\ 25-5(x_2+x_1)+x_1x_2>0 \end{cases} \quad (4)$$

❖ ونعلم أن: $x_2+x_1=-\frac{(-4)}{1}=4$ و $x_1x_2=\frac{a}{1}=a$ ، ومنه فإن:

$$(4)\Leftrightarrow \begin{cases} a<4 \\ 1-4+a>0 \\ 25-5(4)+a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<4 \\ -3+a>0 \\ 5+a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<4 \\ a>3 \\ a>-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<4 \\ a>3 \end{cases}$$

إذن يكون للمعادلة $P(x)=0$ حلان مختلفان محصوران بين 1 و 5 إذا وفقط إذا كان $a\in\left]3;4\right[$.

2) f ثلاثي حدود معرف بـ: $f(x):ax^2+15x+c$ مع a و c عددان حقيقيان.

❖ $\frac{4}{3}$ و $-\frac{1}{2}$ حلان للمعادلة $f(x)=0$ معناه:

❖ $f\left(\frac{4}{3}\right)=0 \Leftrightarrow a\left(\frac{4}{3}\right)^2+15\left(\frac{4}{3}\right)+c=0 \Leftrightarrow \frac{16}{9}a+20+c=0 \quad (1)$.

❖ $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow a\left(-\frac{1}{2}\right)^2+15\left(-\frac{1}{2}\right)+c=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}a-\frac{15}{2}+c=0 \quad (2)$.

من (1) و(2) نستنتج أن:

$$\frac{16}{9}a+20+\cancel{c}=\frac{1}{4}a-\frac{15}{2}+\cancel{c} \Leftrightarrow \left(\frac{16}{9}-\frac{1}{4}\right)a=-\frac{15}{2}-20$$

$$\Leftrightarrow \frac{55}{36}a=-\frac{55}{2} \Leftrightarrow a=-18$$

بتعويض $a=-18$ في (1) نتحصل على: $c=-20-\frac{16}{9}(-18)=-20+32$ أي: $c=12$.

إذن يكون $\frac{4}{3}$ و $-\frac{1}{2}$ حلان للمعادلة $f(x)=0$ عندما يكون $a=-18$ و $c=12$. وعندها تكون عبارة $f(x)$ كالتالي: $f(x):-18x^2+15x+12$.

3) g ثلاثي حدود معرف بـ: $g(x):7x^2+bx+2$ مع $b\in\mathbb{R}$.

المعادلة $g(x)=0$ لا تقبل حلولا معناه أن: $\Delta<0$ ، ولدينا: $\Delta=b^2-56$.

Δ هو كثير حدود جذراه هما: $\left(-\sqrt{56}\right)$ و $\sqrt{56}$ ، و $\Delta<0$ عندما يكون $b\in\left]-\sqrt{56};\sqrt{56}\right[$ أي: $b\in\left]-2\sqrt{14};2\sqrt{14}\right[$.

حل التمرين 4:

1) $x^2-6x=0 \Leftrightarrow x(x-6)=0 \Leftrightarrow x=0 \;\;/\;\; x=6$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^2-6x=0$ هي: $S=\{0;6\}$.

2) $x^2-9=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=3 \;\;/\;\; x=-3$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^2-9=0$ هي: $S=\{-3;3\}$.

3) $x^2+5x=0 \Leftrightarrow x(x+5)=0 \Leftrightarrow x=0 \;\;/\;\; x=-5$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^2+5x=0$ هي: $S=\{-5;0\}$.

4) نعلم أن $x^2\geq 0$ أي: $2x^2+7\geq 7>0$. ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $2x^2+7=0$ هي: $S=\varnothing$.

5) $3x^2-9=0 \Leftrightarrow 3(x^2-3)=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{3} \;\;/\;\; x=-\sqrt{3}$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $3x^2-9=0$ هي: $S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$.

6) $2x^2-7x=0 \Leftrightarrow x(2x-7)=0 \Leftrightarrow x=0 \;\;/\;\; x=\frac{7}{2}$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $2x^2-7x=0$ هي: $S=\left\{0;\frac{7}{2}\right\}$.

حل التمرين 5:

(1

$$x^2-2x+1=(x-1)^2 \qquad x^2+4x+4=(x+2)^2$$

$$x^2+6x+9=(x+3)^2 \qquad x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^2-3x+\frac{9}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \qquad x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2$$

(2

$$x^2-2x+3=(x-1)^2+2 \qquad x^2+4x-5=(x+2)^2-9$$

$$x^2+6x-1=(x+3)^2-10 \qquad x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

$$x^2-3x+4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4} \qquad x^2+\frac{1}{2}x+1=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}$$

(3

❖ من خلال السؤال 2 لدينا: $x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ ، ومنه فإن:

$$x^2-2x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+2=0$$

$$(x-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+2\geq 2>0$$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^2-2x+3=0$ هي: $S=\varnothing$.

❖ من خلال السؤال 2 لدينا: $x^2+4x-5=(x+2)^2-9$ ، ومنه فإن:

$$x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow (x+2)^2-9=0 \Leftrightarrow (x+2)^2-3^2=0 \Leftrightarrow (x+2-3)(x+2+3)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+5)=0 \Leftrightarrow x=1 \ / \ x=-5$$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^2+4x-5=0$ هي: $S=\{-5;1\}$.

حل التمرين 6:

1) $x^2+2x-3=0$ ضروري	2) $x^2-5x=0$	3) $2x^2-x+1=0$ ضروري
4) $-x^2+5x-6=0$ ضروري	5) $3x^2+21x+30=0$ ضروري	6) $4-5x^2=0$
7) $9x^2-24x+16=0$	8) $\frac{1}{2}x^2+2x=-5$ ضروري	9) $-3x^2+x=4$ ضروري
10) $2x^2-\frac{1}{2}=0$	11) $3x^2-7x+5=0$ ضروري	12) $\frac{x^2}{4}+\frac{3}{7}=0$

1) $\Delta=2^2-4(1)(-3)=16>0 \Rightarrow x_1=\frac{-2+4}{2}=2 \ ; \ x_2=\frac{-2-4}{2}=-3$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^2+2x-3=0$ هي: $S=\{-3;2\}$.

2) $x^2-5x=0 \Leftrightarrow x(x-5)=0 \Leftrightarrow x=0 \ / \ x=5$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^2-5x=0$ هي: $S=\{0;5\}$.

3) $\Delta=(-1)^2-4(2)(1)=1-8=-7<0$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $2x^2-x+1=0$ هي: $S=\varnothing$.

4) $\Delta=5^2-4(-1)(-6)=25-24=1>0 \Rightarrow x_1=\frac{-5+1}{2(-1)}=2 \ ; \ x_2=\frac{-5-1}{2(-1)}=3$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $-x^2+5x-6=0$ هي: $S=\{2;3\}$.

5) $3x^2+21x+30=0 \Leftrightarrow 3(x^2+7x+10)=0 \Leftrightarrow x^2+7x+10=0$

❖ $\Delta=7^2-4(1)(10)=49-40=9>0 \Rightarrow x_1=\frac{-7+3}{2}=-2 \ ; \ x_2=\frac{-7-3}{2}=-5$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $3x^2+21x+30=0$ هي: $S=\{-5;-2\}$.

ملاحظة: لو أجرينا الحسابات بمميز ثلاثي الحدود $3x^2+21x+30$، لتحصلنا على نفس النتيجة لكن الحسابات كانت ستكون كبيرة.

6) $4-5x^2=0 \Leftrightarrow 2^2-(\sqrt{5}x)^2=0 \Leftrightarrow (2-\sqrt{5}x)(2+\sqrt{5}x)=0$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{5}} \ / \ x=-\frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{5}}{5} \ / \ x=-\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $4-5x^2=0$ هي: $S=\left\{-\frac{2\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5}\right\}$.

7) $9x^2-24x+16=0 \Leftrightarrow (3x-4)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $9x^2-24x+16=0$ هي: $S=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

8) $\frac{1}{2}x^2+2x=-5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+2x+5=0$

❖ $\Delta=2^2-4\left(\frac{1}{2}\right)(5)=4-10=-6<0$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\frac{1}{2}x^2+2x=-5$ هي: $S=\varnothing$.

9) $-3x^2+x=4 \Leftrightarrow -3x^2+x-4=0$

❖ $\Delta=1^2-4(-3)(-4)=1-48=-47<0$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $-3x^2+x=4$ هي: $S=\varnothing$.

10) $2x^2-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \quad / \quad x=-\frac{1}{2}.$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $2x^2-\frac{1}{2}=0$ هي: $S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.

11) $\Delta=(-7)^2-4(3)(5)=49-60=-11<0$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $3x^2-7x+5=0$ هي: $S=\varnothing$.

12) $\frac{x^2}{4}+\frac{3}{7}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}=-\frac{3}{7}$.

❖ $\frac{x^2}{4}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{3}{7}\geq\frac{3}{7}>0$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\frac{x^2}{4}+\frac{3}{7}=0$ هي: $S=\varnothing$.

حل التمرين 7:

1) $\Delta=(-4)^2-4(1)(3)=16-12=4$

❖ الشكل النموذجي لـ x^2-4x+3 يكون كالتالي:

$$x^2-4x+3=1\left(x+\frac{-4}{2(1)}\right)^2-\frac{4}{4(1)^2}=(x-2)^2-1.$$

❖ $\Delta=4>0 \Rightarrow x_1=\frac{-(-4)+2}{2(1)}=3 \ ; \ x_2=\frac{-(-4)-2}{2(1)}=1$

إذن x^2-4x+3 له جذران هما: 1 و 3.

2) $\Delta=(-48)^2-4(16)(35)=2304-2240=64$

❖ الشكل النموذجي لـ $16x^2-48x+35$ يكون كالتالي:

$$16x^2-48x+35=16\left[\left(x+\frac{-48}{2(16)}\right)^2-\frac{64}{4(16)^2}\right]=16\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{16}.$$

❖ $\Delta=64>0\Rightarrow x_1=\frac{-(-48)+8}{2(16)}=\frac{7}{4}\ ;\ x_2=\frac{-(-48)-8}{2(16)}=\frac{5}{4}.$

إذن $16x^2-48x+35$ له جذران هما: $\frac{7}{4}$ و $\frac{5}{4}$.

3) $\Delta=(4)^2-4(4)(5)=16-80=-64$

❖ الشكل النموذجي لـ $4x^2+4x+5$ يكون كالتالي:

$$4x^2+4x+5=4\left[\left(x+\frac{4}{2(4)}\right)^2-\frac{-64}{4(4)^2}\right]=4\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right].$$

❖ بما أن $\Delta<0$ ، فإن ثلاثي الحدود $4x^2+4x+5$ ليس له جذور.

4) $\Delta=\left(\frac{1}{3}\right)^2-4\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}=0$

❖ الشكل النموذجي لـ $\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}$ يكون كالتالي:

$$\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}=\frac{1}{9}\left[\left(x+\frac{\frac{1}{3}}{2\left(\frac{1}{9}\right)}\right)^2-\frac{0}{4\left(\frac{1}{9}\right)^2}\right]=\frac{1}{9}\left(x+\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)}\right)^2=\frac{1}{9}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2.$$

❖ بما أن $\Delta=0$ ، فإن ثلاثي الحدود $\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}$ له جذر مضاعف هو: $x=-\frac{3}{2}$.

حل التمرين 8:

1) $3x^2+2x=x(3x+2).$

2) $\Delta=(-9)^2-4(2)(-5)=121>0\Rightarrow x_1=\frac{-(-9)+11}{2(2)}=5\ ;\ x_2=\frac{-(-9)-11}{2(2)}=-\frac{1}{2}.$

ومنه فإن: تحليل $2x^2-9x-5$ يكون كالتالي: $2(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

3) $\Delta=(11)^2-4(-3)(-8)=25>0\Rightarrow x_1=\frac{-11+5}{2(-3)}=1\ ;\ x_2=\frac{-11-5}{2(-3)}=\frac{8}{3}.$

ومنه فإن: تحليل $-3x^2+11x-8$ يكون كالتالي: $-3(x-1)\left(x-\frac{8}{3}\right)$.

$$4)\ \Delta=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-4\left(\frac{1}{2}\right)(-12)=\frac{121}{4}>0\Rightarrow x_1=\frac{-\left(-\frac{5}{2}\right)+\frac{11}{2}}{2\left(\frac{1}{2}\right)}=8\ ;\ x_2=\frac{-\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{11}{2}}{2\left(\frac{1}{2}\right)}=-3$$

ومنه فإن: تحليل $\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-12$ يكون كالتالي: $\frac{1}{2}(x-8)(x+3)$.

حل التمرين 9:

1) $x^2-4x-5=0$	$S=\{-1;5\}$
2) $x^2+16x+23=0$	$S=\{-8-\sqrt{41};-8+\sqrt{41}\}$
3) $x^2-11x+28=0$	$S=\{4;7\}$
4) $x^2+x-1=0$	$S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$
5) $-5x^2+2\sqrt{5}x-1=0$	$S=\left\{\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$
6) $-4x^2-x-6=0$	$S=\varnothing$
7) $-6x^2+23x+4=0$	$S=\left\{-\frac{1}{6};4\right\}$
8) $3x^2-2\sqrt{6}x+3=0$	$S=\varnothing$
9) $-\frac{1}{2}x^2-\frac{11}{3}x-\frac{7}{6}=0$	$S=\left\{-7;-\frac{1}{3}\right\}$

حل التمرين 10:

لدينا القطع المكافئ P الذي معادلته $y=x^2-3x+1$ ، والمستقيم D الذي معادلته $y=-2x+1$.

نقاط تقاطع P و D هي النقاط $M(x;y)$ التي تحقق ما يلي:

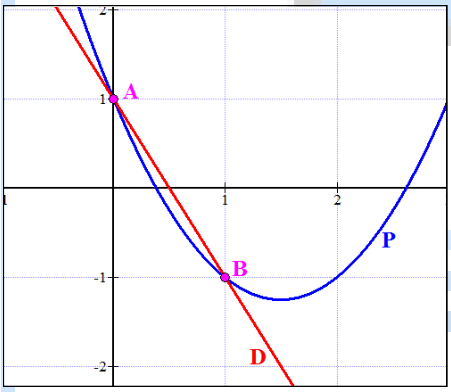
$$\begin{cases} y=x^2-3x+1 \\ y=-2x+1 \end{cases}$$

أي: $x^2-3x+1=-2x+1$ ومنه فإن:

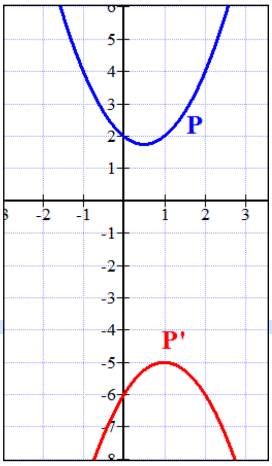
$$x^2-x=0\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow x=0\ \ /\ \ x=1$$

ومنه فإن نقاط تقاطع P و D هي: $A(0;1)$ و $B(1;-1)$.

والشكل المقابل يمثل P و D ، وهو يؤكد صحة النتائج المتحصل عليها.



حل التمرين 11:



لدينا القطع المكافئ P الذي معادلته $y=x^2-x+2$ ، والقطع المكافئ P' الذي معادلته $y=-x^2+2x-6$.

نقاط تقاطع P و P' هي النقاط $M(x;y)$ التي تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} y=x^2-x+2 \\ y=-x^2+2x-6 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-x+2=-x^2+2x-6 \Leftrightarrow 2x^2-3x+8=0$$

$$\Delta=(-3)^2-4(2)(8)=9-64=-55<0$$

ومنه فإنه لا يوجد نقاط تقاطع بين P و P' .

والشكل المقابل يمثل P و P' ، وهو يؤكد صحة النتائج المتحصل عليها.

حل التمرين 12:

1) العددان الحقيقيان اللذان مجموعهما $S=29$ وجداؤهما $P=198$ ، هما حلا المعادلة $x^2-29x+198=0$.

❖ $\Delta=(-29)^2-4(1)(198)=49>0 \Rightarrow x_1=\dfrac{-(-29)+7}{2(1)}=18\ ;\ x_2=\dfrac{-(-29)-7}{2(1)}=11$.

❖ العددان الحقيقيان اللذان مجموعهما $S=29$ وجداؤهما $P=198$ هما: 11 و 18.

2) العددان الحقيقيان اللذان مجموعهما $S=200$ وجداؤهما $P=9999$ ، هما حلا المعادلة $x^2-200x+9999=0$.

❖ $\Delta=(-200)^2-4(1)(9999)=4>0 \Rightarrow x_1=\dfrac{-(-200)+2}{2(1)}=101\ ;\ x_2=\dfrac{-(-200)-2}{2(1)}=99$

❖ العددان الحقيقيان اللذان مجموعهما $S=200$ وجداؤهما $P=9999$ هما: 101 و 99.

حل التمرين 13:

1) نلاحظ أن للمعادلة $3x^2-12x+9=0$ حلا ظاهرا هو: $x_1=1$ لأن: $3(1)^2-12(1)+9=0$.

ولدينا: $S=x_1+x_2=-\dfrac{(-12)}{3}=4$ ، و $x_2=S-x_1$ ، ومنه فإن: $x_2=4-1$ أي: $x_2=3$.

2) نلاحظ أن للمعادلة $-x^2+8x+9=0$ حلا ظاهرا هو: $x_1=-1$ لأن: $-(-1)^2+8(-1)+9=0$.

ولدينا: $S=x_1+x_2=-\dfrac{8}{(-1)}=8$ ، و $x_2=S-x_1$ ، ومنه فإن: $x_2=8-(-1)$ أي: $x_2=9$.

حل التمرين 14:

1) نلاحظ أن للمعادلة $x^2+10x+21=0$ حلا ظاهرا هو: $x_1=-3$ لأن: $(-3)^2+10(-3)+21=0$.

ولدينا: $S=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{10}{1}=-10$ ، و $x_2=S-x_1$ ، ومنه فإن: $x_2=-10-(-3)$ أي: $x_2=-7$.

2) لدينا: $x_1=4$ و $x_2=-3$. ومنه فإن: $S=x_1+x_2=4+(-3)=1$ و $P=x_1\times x_2=4(-3)=-12$.

المعادلة من الدرجة الثانية التي حلاها هما: $x_1=4$ و $x_2=-3$ ، هي المعادلة: $x^2-Sx+P=0$

أي: $x^2 - x - 12 = 0$.

3) المعادلة من الدرجة الثانية التي حلاها هما: x_1 و x_2، واللذان مجموعهما $S = \frac{12}{5}$ وجداؤهما $P = \frac{7}{5}$.

هي المعادلة: $x^2 - Sx + P = 0$ أي: $x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{7}{5} = 0$.

❖ $\Delta = \left(-\frac{12}{5}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{4}{25} > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-\left(-\frac{12}{5}\right) + \frac{2}{5}}{2(1)} = \frac{7}{5}$; $x_2 = \frac{-\left(-\frac{12}{5}\right) - \frac{2}{5}}{2(1)} = 1$

حل التمرين 15:

1) نلاحظ أن للمعادلة $x^2 + 3x - 4 = 0$ حلا ظاهرا هو: $x_1 = 1$ لأن: $1^2 + 3\times1 - 4 = 0$.

ولدينا: $S = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = -3$، و $x_2 = S - x_1$، ومنه فإن: $x_2 = -3 - 1$ أي: $x_2 = -4$.

2) نلاحظ أن للمعادلة $x^2 - 7x + 6 = 0$ حلا ظاهرا هو: $x_1 = 1$ لأن: $1^2 - 7\times1 + 6 = 0$.

ولدينا: $S = -\frac{b}{a} = -\frac{(-7)}{1} = 7$، و $x_2 = S - x_1$، ومنه فإن: $x_2 = 7 - 1$ أي: $x_2 = 6$.

3) نلاحظ أن للمعادلة $x^2 - 2x - 3 = 0$ حلا ظاهرا هو: $x_1 = -1$ لأن: $(-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$.

ولدينا: $P = \frac{c}{a} = \frac{(-3)}{1} = -3$، و $x_2 = \frac{P}{x_1}$، ومنه فإن: $x_2 = \frac{-3}{-1}$ أي: $x_2 = 3$.

حل التمرين 16:

1) $2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 9\left(\frac{1}{2}\right) + 4 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} + 4 = 0$.

ومنه فإن: $\frac{1}{2}$ هو حل للمعادلة $2x^2 - 9x + 4 = 0$.

ولدينا: $P = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$، و $x_2 = \frac{P}{x_1}$، ومنه فإن: $x_2 = 4$.

2) $6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2 = 0$.

ومنه فإن: $\frac{1}{2}$ هو حل للمعادلة $6x^2 + x - 2 = 0$.

ولدينا: $S = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{6}$، و $x_2 = S - x_1$، ومنه فإن: $x_2 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{-1-3}{6}$ أي: $x_2 = -\frac{2}{3}$.

حل التمرين 17:

لدينا المعادلة ذات الوسيط الحقيقي m: $(E_m):(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6=0$

❖ عندما يكون $m-2\neq 0$ أي: $m\neq 2$، فإن: (E_m) تكون معادلة من الدرجة الثانية، ويكون مميزها:

$$\begin{aligned}\Delta&=(2(2m-3))^2-4(m-2)(5m-6)=4(2m-3)^2-4(m-2)(5m-6)\\&=4\left[4m^2-12m+9-(5m^2-6m-10m+12)\right]\\&=4\left[4m^2-12m+9-5m^2+16m-12\right]=4(-m^2+4m-3)\end{aligned}$$

❖ $\Delta=0\Leftrightarrow -m^2+4m-3=0\Leftrightarrow m_1=1\ ;\ m_2=3.$

ومنه فإن جدول إشارة Δ يكون كالتالي:

m	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

❖ عندما يكون $m\in]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$، فإن: $\Delta<0$، ومنه فإن المعادلة (E_m) ليس لها حلول. أي: $S=\varnothing$.

❖ عندما يكون $m\in]1;2[\cup]2;3[$، فإن: $\Delta>0$، ومنه فإن المعادلة (E_m) تقبل حلين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-2(2m-3)+2\sqrt{-m^2+4m-3}}{2(m-2)}=\frac{-(2m-3)+\sqrt{-m^2+4m-3}}{(m-2)}$$

و

$$x_2=\frac{-2(2m-3)-2\sqrt{-m^2+4m-3}}{2(m-2)}=\frac{-(2m-3)-\sqrt{-m^2+4m-3}}{(m-2)}$$

أي: $S=\{x_1;x_2\}$.

❖ عندما يكون $m=1$، فإن: $\Delta=0$، ومنه فإن المعادلة (E_m) تقبل حلا مضاعفا هو:

$$x_1=x_2=\frac{-2(2m-3)}{2(m-2)}=\frac{-(2m-3)}{(m-2)}=\frac{-(2\times1-3)}{(1-2)}=-1$$

أي: $S=\{-1\}$.

❖ عندما يكون $m=2$، فإن: المعادلة (E_m) تكون من الدرجة الأولى: $(E_m):2x+4=0$، ومنه فإن $x=-2$، أي: $S=\{-2\}$.

❖ عندما يكون $m=3$، فإن: $\Delta=0$، ومنه فإن المعادلة (E_m) تقبل حلا مضاعفا هو:

$$x_1=x_2=\frac{-2(2m-3)}{2(m-2)}=\frac{-(2m-3)}{(m-2)}=\frac{-(2\times3-3)}{(3-2)}=-3$$

أي: $S=\{-3\}$.

حل التمرين 18:

لدينا المعادلة ذات الوسيط الحقيقي m: $(E_m):(m-2)x^2+(2m+2)x+10m-14=0$.

1) عندما يكون $m-2\neq 0$ أي: $m\neq 2$، فإن: (E_m) تكون معادلة من الدرجة الثانية، ويكون مميزها:

$$\Delta=(2m+2)^2-4(m-2)(10m-14)=\left(4m^2+8m+4\right)-4\left(10m^2-14m-20m+28\right)$$

$$=-36m^2+144m-108=36\left(-m^2+4m-3\right)$$

❖ $\Delta=0\Leftrightarrow -m^2+4m-3=0\Leftrightarrow m_1=1\ ;\ m_2=3.$

لندرس إشارة الجداء P و المجموع S:

❖ $P=\frac{c}{a}=\frac{10m-14}{m-2}$، $P=0$ معناه $\begin{cases}10m-14=0\\ m-2\neq 0\end{cases}$ أي: $\begin{cases}m=\frac{7}{5}\\ m\neq 2\end{cases}$.

❖ $S=\frac{-b}{a}=\frac{-2m-2}{m-2}$، $S=0$ معناه $\begin{cases}-2m-2=0\\ m-2\neq 0\end{cases}$ أي: $\begin{cases}m=-1\\ m\neq 2\end{cases}$.

❖ نلخص كل ما سبق في الجدول التالي:

m	$]-\infty;-1[$	$]-1;1[$	1	$]1;\frac{7}{5}[$	$\frac{7}{5}$	$]\frac{7}{5};2[$	2	$]2;3[$	3	$]3;+\infty[$
Δ	$-$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$
P				$+$	0	$-$		$+$		
S				$+$		$+$		$-$		
	$S=\varnothing$	$S=\varnothing$	$x_1=x_2=2$	$x_1>0$, $x_2>0$	$x_1=0$, $x_2>0$	$x_1<0$, $x_2>0$, $\lvert x_1\rvert<\lvert x_2\rvert$	$x=-1$	$x_1<0$, $x_2<0$	$x_1=x_2=-4$	$S=\varnothing$

❖ عندما يكون $m\in]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$، فإن: $\Delta<0$، ومنه فإن المعادلة (E_m) ليس لها حلول. أي:

$S=\varnothing$.

❖ عندما يكون $m\in\left]1;\frac{7}{5}\right[\cup\left]\frac{7}{5};2\right[\cup]2;3[$، فإن: $\Delta>0$، ومنه فإن المعادلة (E_m) تقبل حلين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-2(m+1)+6\sqrt{-m^2+4m-3}}{2(m-2)}=\frac{-(m+1)+3\sqrt{-m^2+4m-3}}{(m-2)}$$

و $x_2=\frac{-2(m+1)-6\sqrt{-m^2+4m-3}}{2(m-2)}=\frac{-(m+1)-3\sqrt{-m^2+4m-3}}{(m-2)}$. أي: $S=\{x_1;x_2\}$.

❖ عندما يكون $m=1$، فإن: $\Delta=0$، ومنه فإن المعادلة (E_m) تقبل حلا مضاعفا هو:

$$x_1=x_2=\frac{-2(m+1)}{2(m-2)}=\frac{-(m+1)}{(m-2)}=\frac{-(1+1)}{(1-2)}=2$$ أي: $S=\{2\}$.

❖ عندما يكون $m=\frac{7}{5}$، فإن: $\Delta>0$، ومنه فإن المعادلة (E_m) تقبل حلين مختلفين هما:

$x_1=\frac{-(m+1)+3\sqrt{-m^2+4m-3}}{(m-2)}=0$ و $x_2=\frac{-(m+1)-3\sqrt{-m^2+4m-3}}{(m-2)}=8$.

أي: $S=\{0;8\}$.

❖ عندما يكون $m=2$، فإن: المعادلة (E_m) تكون من الدرجة الأولى: $(E_m): 6x+6=0$، ومنه فإن $x=-1$، أي: $S=\{-1\}$.

❖ عندما يكون $m=3$، فإن: $\Delta=0$، ومنه فإن المعادلة (E_m) تقبل حلا مضاعفا هو:

$$x_1=x_2=\frac{-2(m+1)}{2(m-2)}=\frac{-(m+1)}{(m-2)}=\frac{-(3+1)}{(3-2)}=-4$$

أي: $S=\{-4\}$.

2) يكون للمعادلة (E_m) حلين إشارتهما مختلفة، عندما يكون $m\in\left]\frac{7}{5};2\right[$.

3) يكون للمعادلة (E_m) حلين موجبين، عندما يكون $m\in\left[1;\frac{7}{5}\right]$.

حل التمرين 19:

المعادلة $(E_m): 4x^2+(m-1)x+1=0$ مميزها:

$$\Delta=(m-1)^2-4(4)(1)=m^2-2m+1-16=m^2-2m-15$$

يكون للمعادلة (E_m) حلا مضاعفا عندما يكون $\Delta=0$ أي: $m^2-2m-15=0$ (1).

المعادلة (1) مميزها: $\Delta'=(-2)^2-4(1)(-15)=64$.

وبما أن: $\Delta'>0$، فإن: المعادلة (1) تقبل حلين مختلفين هما:

$m_1=\frac{-(-2)-\sqrt{64}}{2\times1}=-1$ و $m_2=\frac{-(-2)+\sqrt{64}}{2\times1}=5$. ومنه فإنه:

❖ من أجل $m=-3$، تكون عبارة (E_m) كالتالي: $(E_m): 4x^2-4x+1=0$، ويكون لها حل مضاعف هو: $x=\frac{-(-4)}{2\times4}$ أي: $x=\frac{1}{2}$.

❖ من أجل $m=5$، تكون عبارة (E_m) كالتالي: $(E_m): 4x^2+4x+1=0$، ويكون لها حل مضاعف هو: $x=\frac{-4}{2\times4}$ أي: $x=-\frac{1}{2}$.

حل التمرين 20:

في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$، لدينا القطع المكافئ P الذي معادلته $y=x^2$، والمستقيم D_m الذي معادلته $y=-2x+m$ حيث m عدد حقيقي.

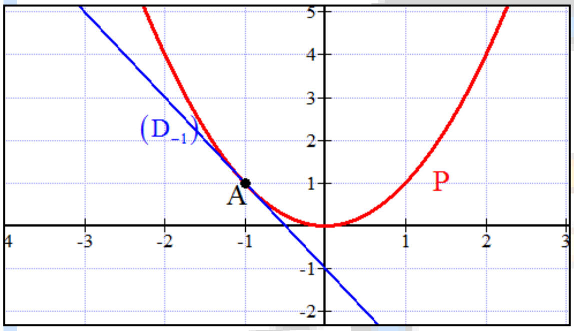
1) لتحديد قيم m التي من أجلها المستقيم D_m يقطع P في نقطة وحيدة، يجب أولا حل المعادلة:

$$-2x+m=x^2 \Leftrightarrow x^2+2x-m=0 \quad (1)$$

ومن ثمّ إيجاد قيم m التي من أجلها يوجد حل مضاعف للمعادلة (1) أي $\Delta=0$.

❖ $\Delta=(2)^2-4(1)(-m)=4+4m$.

❖ $\Delta=0 \Leftrightarrow 4+4m=0 \Leftrightarrow m=-1$.



ومنه فإن الحل المضاعف هو:

$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2}=-1$ و $y=(-1)^2=1$.

من هنا نستنتج أنه عندما يكون $m=-1$ فإن:

$(D_{-1}): y=-2x-1$ يقطع P في نقطة وحيدة هي النقطة $A(-1;1)$.

والشكل المقابل يمثل كلا من P و المستقيم (D_{-1}).

2) قيم m التي من أجلها المستقيم D_m يقطع P في نقطتين مختلفتين، هي القيم التي يكون من أجلها مميز

3) المعادلة (1) يحقق الشرط التالي: $\Delta>0$ أي: $4+4m>0$ أي: $m>-1$ أي: $m\in\left]-1;+\infty\right[$.

حل التمرين 21:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2-9-2(x-3)(x+2)$.

1) $f(x)=x^2-9-2(x-3)(x+2)=x^2-9-2\left(x^2+2x-3x-6\right)=x^2-9-2\left(x^2-x-6\right)$

$$=x^2-9-2x^2+2x+12=-x^2+2x+3.$$

ومنه فإن $-x^2+2x+3$ هي العبارة المنشورة والمختزلة لـ $f(x)$.

2) $\Delta=(2)^2-4(-1)(3)=16$.

$$f(x)=-\left[\left(x+\frac{2}{2(-1)}\right)^2-\frac{16}{4(-1)^2}\right]=-\left[(x-1)^2-4\right]=-(x-1)^2+4$$

ومنه فإن $-(x-1)^2+4$ هي الشكل النموذجي لـ $f(x)$.

❖ $\Delta=16>0 \Rightarrow x_1=\frac{-2+4}{2(-1)}=-1 \;;\; x_2=\frac{-2-4}{2(-1)}=3$.

ومنه فإن $-(x+1)(x-3)$ هي تحليل لـ $f(x)$.

3) لحل المعادلة $f(x)=4$ نستعمل الشكل النموذجي لـ $f(x)$، فنتحصل على:

$$-(x-1)^2+4=4 \Leftrightarrow -(x-1)^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $f(x)=4$ هي: $S=\{1\}$.

4) بما أن $a=-1<0$ فإن: $f(x)$ من إشارة a خارج الجذرين. ومنه فإن مجموعة حلول $f(x)\leq 0$ هي: $S=]-\infty,-1]\cup[3;+\infty[$.

5) لحل المتراجحة $f(x)>3$ ، نستعمل العبارة المنشورة والمختزلة لـ $f(x)$ ، فنتحصل على:

$$-x^2+2x+3>3\Leftrightarrow -x^2+2x>0$$

❖ $-x^2+2x=0\Leftrightarrow x(2-x)=0\Leftrightarrow x=0\ /\ x=2$.

❖ $-x^2+2x$ ثلاثي حدود مع $a=-1<0$ ، ومنه فإن $-x^2+2x$ عكس إشارة a داخل الجذرين. ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>3$ هي: $S=]0;2[$.

حل التمرين 22:

1) $\Delta=(-2)^2-4(1)(1)=0\Rightarrow x_1=x_2=1$.

وبما أن $\Delta=0$ ، و $a=1>0$ فإن $P(x)>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

ملاحظة:

يمكن استعمال كون $P(x)$ جداء شهير لأن $P(x)=x^2-2x+1$ أي $P(x)=(x-1)^2$ فهو مربع، ومنه فإن $P(x)\geq 0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

2) $\Delta=(0)^2-4(1)(-1)=4>0\Rightarrow x_1=-1\ ;\ x_2=1$.

ومنه فإن جدول إشارة $Q(x)$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) $\Delta=(5)^2-4(-3)(-2)=1>0\Rightarrow x_1=\frac{2}{3}\ ;\ x_2=1$

ومنه فإن جدول إشارة $S(x)$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$S(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4) $\Delta=(1)^2-4(2)(3)=-23<0$

وبما أن $\Delta<0$ و $a=2>0$ فإن: $T(x)>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

حل التمرين 23:

1)

❖ $\Delta=(-4)^2-4(3)(5)=-44<0$

وبما أن $\Delta<0$ و $a=3>0$ ، فإن: $3x^2-4x+5>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

❖ $\Delta=(-5)^2-4(2)(2)=9>0\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\ ;\ x_2=2$

ومنه فإن جدول إشارة $2x^2-5x+2$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-5x+2$		$+$	0	-	0	$+$	

❖ $\Delta=(4)^2-4(-4)(-1)=0 \Rightarrow x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$

وبما أن $a=-4<0$ فإن $-4x^2+4x-1<0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

(2

❖ من خلال السؤال السابق، فإن: $3x^2-4x+5>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، ومنه فإن المتراجحة $3x^2-4x+5<0$ ليس لها حلول.

❖ من خلال جدول الإشارة في السؤال السابق، فإن مجموعة حلول المتراجحة $2x^2-5x+2<0$ هي: $S=\left]\dfrac{1}{2};2\right[$.

❖ من خلال السؤال السابق، فإن مجموعة حلول المتراجحة $-4x^2+4x-1<0$ هي: $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

(3

❖ من خلال السؤال الأول، فإن مجموعة حلول المتراجحة $3x^2-4x+5\geq 0$ هي $S=\mathbb{R}$.

❖ من خلال جدول الإشارة في السؤال الأول، فإن مجموعة حلول المتراجحة $2x^2-5x+2\geq 0$ هي: $S=\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty[$.

❖ من خلال السؤال الأول، فإن مجموعة حلول المتراجحة $-4x^2+4x-1\geq 0$ هي: $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

حل التمرين 24:

1) $\Delta=(3)^2-4(2)(1)=1>0 \Rightarrow x_1=-\dfrac{1}{2}\ ;\ x_2=-1$

وبما أن $a=2>0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة $2x^2+3x+1\geq 0$ هي: $S=\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup[-1;+\infty[$.

2) $\Delta=(-3)^2-4(1)(-7)=37>0 \Rightarrow x_1=\dfrac{3-\sqrt{37}}{2}\ ;\ x_2=\dfrac{3+\sqrt{37}}{2}$

وبما أن $a=1>0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة $x^2-3x-7<0$ هي: $S=\left]\dfrac{3-\sqrt{37}}{2};\dfrac{3+\sqrt{37}}{2}\right[$.

3) نعلم أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا $4x^2\geq 0$ ، ونعلم أن كل عدد موجب هو أكبر من -3 ، ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $4x^2>-3$ هي: $S=\mathbb{R}$.

4) $-x^2<\sqrt{2}x-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow -x^2-\sqrt{2}x+\dfrac{3}{2}<0$.

❖ $\Delta=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4(-1)\left(\dfrac{3}{2}\right)=8>0 \Rightarrow x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ x_2=\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}$.

وبما أن $a=-1<0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة $-x^2<\sqrt{2}x-\frac{3}{2}$ هي:

$S=\left]-\infty;-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

5) $x-x^2=0\Leftrightarrow x(1-x)=0\Leftrightarrow x_1=0\ ;\ x_2=1$.

وبما أن $a=-1<0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة $x-x^2\geq 0$ هي: $S=[0;1]$.

6) $3x^2+\frac{1}{2}x\leq 4\Leftrightarrow 3x^2+\frac{1}{2}x-4\leq 0$.

❖ $\Delta=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4(3)(-4)=\frac{193}{4}>0\Rightarrow x_1=\frac{-1-\sqrt{193}}{12}\ ;\ x_2=\frac{-1+\sqrt{193}}{12}$.

وبما أن $a=3>0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة $3x^2+\frac{1}{2}x\leq 4$ هي: $S=\left[\frac{-1-\sqrt{193}}{12};\frac{-1+\sqrt{193}}{12}\right]$.

حل التمرين 25:

1) $\Delta=(-2)^2-4(1)(1)=0\Rightarrow x_1=x_2=1$

وبما أن $a=1>0$ فإن $x^2-2x+1>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2) $\Delta=(5)^2-4(-3)(-2)=1>0\Rightarrow x_1=\frac{2}{3}\ ;\ x_2=1$

وبما أن $a=-3<0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة $-3x^2+5x-2\leq 0$ هي: $S=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]\cup[1;+\infty[$.

3) $x(2x-5)\geq x-6\Leftrightarrow 2x^2-6x+6\geq 0$.

❖ $\Delta=(-6)^2-4(2)(6)=-12<0$

وبما أن $\Delta<0$ و $a=2>0$، فإن مجموعة حلول المتراجحة $x(2x-5)\geq x-6$ هي: $S=\mathbb{R}$.

4) $\Delta=(-4)^2-4(-1)(5)=36>0\Rightarrow x_1=-5\ ;\ x_2=1$.

وبما أن $a=-1<0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة $-x^2-4x+5\geq 0$ هي: $S=[-5;1]$.

5) $\Delta=(1)^2-4(1)(-3)=13>0\Rightarrow x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\ ;\ x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

وبما أن $a=1>0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة $x^2+x-3\geq 0$ هي:

$S=\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{13}}{2};+\infty\right[$.

6) $\Delta=(4)^2-4(-3)(-2)=-8<0$

وبما أن $\Delta<0$ و $a=-3<0$، فإن مجموعة حلول المتراجحة $-3x^2+4x-2>0$ هي: $S=\varnothing$.

حل التمرين 26:

1) لنضع $X=x^2$ ومنه فإن $x^4+x^2+1=0$ تؤول إلى $X^2+X+1=0$.

❖ $\Delta=(1)^2-4(1)(1)=-3<0$

وبما أن $\Delta<0$ فإن X^2+X+1 ليس له جذور، ومنه فإن المعادلة $x^4+x^2+1=0$ ليس لها حلول، أي $S=\varnothing$.

2) لنضع $X=x^2$ ومنه فإن $3x^4-4x^2+1=0$ تؤول إلى $3X^2-4X+1=0$.

❖ $\Delta=(-4)^2-4(3)(1)=4>0\Rightarrow X_1=\frac{1}{3}\ ;\ X_2=1$

❖ $x^2=X_1=\frac{1}{3}$ معناه: $x_1=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ أو $x_2=-\sqrt{\frac{1}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

❖ $x^2=X_2=1$ معناه: $x_3=1$ أو $x_4=-1$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $3x^4-4x^2+1=0$ هي: $S=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3};-1;\frac{\sqrt{3}}{3};1\right\}$.

3) لنضع $X=x^2$ ومنه فإن $x^4-5x^2+6=0$ تؤول إلى $X^2-5X+6=0$.

❖ $\Delta=(-5)^2-4(1)(6)=1>0\Rightarrow X_1=2\ ;\ X_2=3$

❖ $x^2=X_1=2$ معناه: $x_1=\sqrt{2}$ أو $x_2=-2$.

❖ $x^2=X_2=3$ معناه: $x_3=\sqrt{3}$ أو $x_4=-\sqrt{3}$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^4-5x^2+6=0$ هي: $S=\left\{-\sqrt{3};-\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{3}\right\}$.

4) $x^5-x^3-12x=0\Leftrightarrow x\left(x^4-x^2-12\right)=0\Leftrightarrow x=0\ /\ x^4-x^2-12=0$.

لنضع $X=x^2$ ومنه فإن $x^4-x^2-12=0$ تؤول إلى $X^2-X-12=0$.

❖ $\Delta=(-1)^2-4(1)(-12)=49>0\Rightarrow X_1=-3\ ;\ X_2=4$

❖ $x^2=X_1=-3<0$ لا يوجد عدد حقيقي يحقق هذه المساواة.

❖ $x^2=X_2=4$ معناه: $x_1=2$ أو $x_2=-2$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^5-x^3-12x=0$ هي: $S=\{-2;0;2\}$.

5) لنضع $X=x^2$ ومنه فإن $x^4-x^2-2=0$ تؤول إلى $X^2-X-2=0$.

❖ $\Delta=(-1)^2-4(1)(-2)=9>0\Rightarrow X_1=-1\ ;\ X_2=2$

❖ $x^2=X_1=-1<0$ لا يوجد عدد حقيقي يحقق هذه المساواة.

❖ $x^2=X_2=2$ معناه: $x_1=\sqrt{2}$ أو $x_2=-\sqrt{2}$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^4-x^2-2=0$ هي: $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

6) لنضع $X=x^2$ ومنه فإن $4x^4-13x^2+3=0$ تؤول إلى $4X^2-13X+3=0$.

❖ $\Delta=(-13)^2-4(4)(3)=121>0\Rightarrow X_1=\frac{1}{4}\ ;\ X_2=3$

❖ $x^2 = X_1 = \frac{1}{4}$ معناه: $x_1 = \frac{1}{2}$ أو $x_2 = -\frac{1}{2}$.

❖ $x^2 = X_2 = 3$ معناه: $x_3 = \sqrt{3}$ أو $x_4 = -\sqrt{3}$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$ هي: $S = \left\{-\sqrt{3}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \sqrt{3}\right\}$.

7) لنضع $X = x^2$ ومنه فإن $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ تؤول إلى $X^2 - 13X + 36 = 0$.

❖ $\Delta = (-13)^2 - 4(1)(36) = 25 > 0 \Rightarrow X_1 = 4 \;\; ; \;\; X_2 = 9$

❖ $x^2 = X_1 = 4$ معناه: $x_1 = 2$ أو $x_2 = -2$.

❖ $x^2 = X_2 = 9$ معناه: $x_3 = 3$ أو $x_4 = -3$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ هي: $S = \{-3; -2; 2; 3\}$.

8) لنضع $X = x^2$ ومنه فإن $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ تؤول إلى $X^2 - 6X + 1 = 0$.

❖ $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(1) = 32 > 0 \Rightarrow X_1 = 3 - 2\sqrt{2} \;\; ; \;\; X_2 = 3 + 2\sqrt{2}$

❖ $x^2 = X_1 = 3 - 2\sqrt{2} < 0$ لا يوجد عدد حقيقي يحقق هذه المساواة.

❖ $x^2 = X_2 = 3 + 2\sqrt{2}$ معناه: $x_1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ أو $x_2 = -\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ هي: $S = \left\{-\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}; \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right\}$.

9) لنضع $X = x^2$ ومنه فإن $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ تؤول إلى $X^2 - 8X + 16 = 0$.

❖ $\Delta = (-8)^2 - 4(1)(16) = 0 \Rightarrow X_1 = X_2 = 4$

❖ $x^2 = X_1 = 4$ معناه: $x_1 = 2$ أو $x_2 = -2$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ هي: $S = \{-2; 2\}$.

حل التمرين 27:

1) لنضع $X = x^2$ ومنه فإن $x^4 - 4 \le 0$ تؤول إلى $X^2 - 4 \le 0$.

❖ $X^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (X-2)(X+2) = 0 \Leftrightarrow X = 2 \;/\; X = -2$.

❖ $X^2 - 4 \le 0 \Leftrightarrow (X-2)(X+2) \le 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 2) \le 0 \;\; (1)$

وبما أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $x^2 + 2 \ge 0$ فإن (1) تؤول إلى: $x^2 - 2 \le 0$.

❖ $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$

وبما أن $a = 1 > 0$ فإن $x^2 - 2 \le 0$ عندما يكون $x \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $x^4 - 4 \le 0$ هي: $S = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

2) لنضع $X = x^2$ ومنه فإن $x^4 - x^2 - 12 \ge 0$ تؤول إلى $X^2 - X - 12 \ge 0$.

❖ $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-12) = 49 > 0 \Rightarrow X_1 = -3 \;\; ; \;\; X_2 = 4$

ومنه فإن $X^2 - X - 12 = (X+3)(X-4)$

$X^2 - X - 12 \ge 0 \Leftrightarrow (X+3)(X-4) \ge 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3)(x^2 - 4) \ge 0 \;\; (1)$

وبما أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا $x^2+3\geq 0$ فإن (1) تؤول إلى: $x^2-4\geq 0$.

❖ $x^2-4=0\Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$

وبما أن $a=1>0$ فإن $x^2-4\geq 0$ عندما يكون $x\in\left]-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right[$.

ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $x^4-x^2-12\geq 0$ هي: $S=\left]-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right[$.

3) لنضع $X=x^2$ ومنه فإن $x^4-11x^2+30\leq 0$ تؤول إلى $X^2-11X+30\leq 0$.

❖ $\Delta=(-11)^2-4(1)(30)=1>0\Rightarrow X_1=5\ ;\ X_2=6$

ومنه فإن $X^2-11X+30=(X-5)(X-6)$

$$X^2-11X+30\leq 0\Leftrightarrow (X-5)(X-6)\leq 0\Leftrightarrow (x^2-5)(x^2-6)\leq 0\ (1)$$

❖ $x^2-5=0\Leftrightarrow (x-\sqrt5)(x+\sqrt5)=0$

وبما أن $a=1>0$ فإن $x^2-5\geq 0$ عندما يكون $x\in\left]-\infty;-\sqrt5\right]\cup\left[\sqrt5;+\infty\right[$ (2).

❖ $x^2-6=0\Leftrightarrow (x-\sqrt6)(x+\sqrt6)=0$

وبما أن $a=1>0$ فإن $x^2-6\geq 0$ عندما يكون $x\in\left]-\infty;-\sqrt6\right]\cup\left[\sqrt6;+\infty\right[$ (3).

❖ من (2) و(3) نستنتج جدول إشارة (1) الذي يكون كالتالي:

x	$-\infty$	$-\sqrt6$		$-\sqrt5$		$\sqrt5$		$\sqrt6$		$+\infty$
x^2-5	+		+	0	−	0	+		+	+
x^2-6	+	0	−		−		−	0	+	+
x^4-11x^2+30	+	0	−	0	+	0	−	0	+	+

ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $x^4-11x^2+30\leq 0$ هي: $S=\left[-\sqrt6;-\sqrt5\right]\cup\left[\sqrt5;\sqrt6\right]$.

حل التمرين 28:

1) دراسة إشارة كثير حدود:

a) $(x-3)(x-4)(x+7)=0\Leftrightarrow (x-3)=0\ /\ (x-4)=0\ /\ (x+7)=0$

$\Leftrightarrow x=3\ /\ x=4\ /\ x=-7$.

إذن جدول إشارة $(x-3)(x-4)(x+7)$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$	-7		3		4		$+\infty$
$x-3$	−		−	0	+		+	+
$x-4$	−		−		−	0	+	+
$x+7$	−	0	+		+		+	+
$(x-3)(x-4)(x+7)$	−	0	+	0	−	0	+	+

ومنه فإن:

❖ $(x-3)(x-4)(x+7)<0$ عندما يكون $x\in\left]-\infty;-7\right[\cup\left]3;4\right[$.

❖ $(x-3)(x-4)(x+7)>0$ عندما يكون $x\in\left]-7;3\right[\cup\left]4;+\infty\right[$.

b) $(x-1)(x^2+x+3)=0\Leftrightarrow x-1=0\ /\ x^2+x+3=0\Leftrightarrow x=1\ /\ x^2+x+3=0$.

❖ $\Delta=(1)^2-4(1)(3)=-11<0$.

وبما أن $\Delta<0$ و $a=1>0$، فإن $x^2+x+3>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

إذن جدول إشارة $(x-1)(x^2+x+3)$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	$+$
x^2+x+3		$+$		$+$	$+$
$(x-1)(x^2+x+3)$		$-$	0	$+$	$+$

ومنه فإن:

❖ $(x-1)(x^2+x+3)<0$ عندما يكون $x\in]-\infty;1[$.

❖ $(x-1)(x^2+x+3)>0$ عندما يكون $x\in]1;+\infty[$.

c) $(x+1)(x^2-x+1)=0 \Leftrightarrow x+1=0\ /\ x^2-x+1=0 \Leftrightarrow x=-1\ /\ x^2-x+1=0$.

❖ $\Delta=(-1)^2-4(1)(1)=-3<0$.

وبما أن $\Delta<0$ و $a=1>0$، فإن $x^2-x+1>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

إذن جدول إشارة $(x+1)(x^2-x+1)$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$+$
x^2-x+1		$+$		$+$	$+$
$(x+1)(x^2-x+1)$		$-$	0	$+$	$+$

ومنه فإن:

❖ $(x+1)(x^2-x+1)<0$ عندما يكون $x\in]-\infty;-1[$.

❖ $(x+1)(x^2-x+1)>0$ عندما يكون $x\in]-1;+\infty[$.

d) $(x-1)(x^2-3x+2)=0 \Leftrightarrow x-1=0\ /\ x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1\ /\ x^2-3x+2=0$.

❖ $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=1>0 \Rightarrow x_1=1\ ;\ x_2=2$.

إذن جدول إشارة $(x-1)(x^2-3x+2)$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	$+$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$(x-1)(x^2-3x+2)$		$-$	0	$-$	0	$+$	$+$

ومنه فإن:

❖ $(x-1)(x^2-3x+2)<0$ عندما يكون $x\in]-\infty;1[\cup]1;2[$.

❖ $(x-1)(x^2-3x+2)>0$ عندما يكون $x\in]2;+\infty[$.

e) $(x-1)(x-2)(x^2-2x+5)=0 \Leftrightarrow (x-1)=0\ /\ (x-2)=0\ /\ (x^2-2x+5)=0$

$\Leftrightarrow x=1\ /\ x=2\ /\ x^2-2x+5=0$.

❖ $\Delta=(-2)^2-4(1)(5)=-16<0$.

وبما أن $\Delta < 0$ و $a = 1 > 0$، فإن $x^2 - 2x + 5 > 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

إذن جدول إشارة $(x-1)(x-2)(x^2-2x+5)$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	$+$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	$+$
x^2-2x+5		$+$		$+$		$+$	$+$
$(x-1)(x-2)(x^2-2x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

ومنه فإن:

❖ $(x-1)(x-2)(x^2-2x+5) < 0$ عندما يكون $x \in]1;2[$.

❖ $(x-1)(x-2)(x^2-2x+5) > 0$ عندما يكون $x \in]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$.

f) $(2x+7)(x^2+2x+2) = 0 \Leftrightarrow 2x+7 = 0 \ / \ x^2+2x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \ / \ x^2+2x+2 = 0$.

❖ $\Delta = (2)^2 - 4(1)(2) = -4 < 0$.

وبما أن $\Delta < 0$ و $a = 1 > 0$، فإن $x^2 + 2x + 2 > 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

إذن جدول إشارة $(2x+7)(x^2+2x+2)$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2x+7$		$-$	0	$+$	$+$
x^2+2x+2		$+$		$+$	$+$
$(2x+7)(x^2+2x+2)$		$-$	0	$+$	$+$

ومنه فإن:

❖ $(2x+7)(x^2+2x+2) < 0$ عندما يكون $x \in \left]-\infty;-\frac{7}{2}\right[$.

❖ $(2x+7)(x^2+2x+2) > 0$ عندما يكون $x \in \left]-\frac{7}{2};+\infty\right[$.

g) $(2x-3)(-2x^2+5x+3) = 0 \Leftrightarrow 2x-3 = 0 \ / \ -2x^2+5x+3 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \ / \ -2x^2+5x+3 = 0$$

❖ $\Delta = (5)^2 - 4(-2)(3) = 49 > 0 \Rightarrow x_1 = 3 \ ; \ x_2 = -\frac{1}{2}$.

إذن جدول إشارة $(2x-3)(-2x^2+5x+3)$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	$+$
$-2x^2+5x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	$-$
$(2x-3)(-2x^2+5x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$

ومنه فإن:

❖ $(2x-3)(-2x^2+5x+3) < 0$ عندما يكون $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[\cup]3;+\infty[$.

❖ $(2x-3)(-2x^2+5x+3)>0$ عندما يكون $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};3\right[$.

2) حل المتراجحات في $\mathbb{R}$:

a) من خلال الجدول في السؤال السابق فإن مجموعة حلول المتراجحة $(x-3)(x-4)(x+7)\geq 0$ هي:
$S=[-7;3]\cup[4;+\infty[$.

b) من خلال الجدول في السؤال السابق فإن مجموعة حلول المتراجحة $(x-1)(x^2+x+3)\leq 0$ هي:
$S=]-\infty;1]$.

c) من خلال الجدول في السؤال السابق فإن مجموعة حلول المتراجحة $(x+1)(x^2-x+1)\leq 0$ هي:
$S=]-\infty;-1]$.

d) من خلال الجدول في السؤال السابق فإن مجموعة حلول المتراجحة $(x-1)(x^2-3x+2)>0$ هي:
$S=]2;+\infty[$.

e) من خلال الجدول في السؤال السابق فإن مجموعة حلول المتراجحة $(x-1)(x-2)(x^2-2x+5)\leq 0$ هي: $S=[1;2]$.

f) من خلال الجدول في السؤال السابق فإن مجموعة حلول المتراجحة $(2x+7)(x^2+2x+2)\geq 0$ هي:
$S=\left[-\frac{7}{2};+\infty\right[$.

g) من خلال الجدول في السؤال السابق فإن مجموعة حلول المتراجحة $(2x-3)(-2x^2+5x+3)>0$ هي:
$S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};3\right[$.

حل التمرين 29:

a) لدينا $f(x)=x-\frac{1}{x}$ وهي معرفة من أجل $x\neq 0$، ولدينا:

$$f(x)=0\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x}=0\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x+1)}{x}=0\Leftrightarrow x=1\ /\ x=-1.$$

ومنه فإن جدول إشارة $f(x)$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

❖ $f(x)<0$ عندما يكون $x\in]-\infty;-1[\cup]0;1[$.

❖ $f(x)>0$ عندما يكون $x\in]-1;0[\cup]1;+\infty[$.

b) لدينا $g(x)=x+\frac{2}{x-3}$ وهي معرفة من أجل $x-3\neq 0$ أي: $x\neq 3$.

$$g(x)=0\Leftrightarrow x+\frac{2}{x-3}=0\Leftrightarrow\frac{x(x-3)+2}{x-3}=0\Leftrightarrow\frac{x^2-3x+2}{x-3}=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0.$$

❖ $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=1>0 \Rightarrow x_1=1\ ;\ x_2=2$.

ومنه فإن جدول إشارة $g(x)$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

❖ $g(x)<0$ عندما يكون $x\in]-\infty;1[\cup]2;3[$.

❖ $g(x)>0$ عندما يكون $x\in]1;2[\cup]3;+\infty[$.

حل التمرين 30:

a) من خلال الجدول في التمرين السابق فإن مجموعة حلول المتراجحة $x-\frac{1}{x}\geq 0$ هي:

$S=[-1;0[\cup[1;+\infty[$.

b) من خلال الجدول في التمرين السابق فإن مجموعة حلول المتراجحة $x+\frac{2}{x-3}\leq 0$ هي:

$S=]-\infty;1]\cup[2;3[$.

c) $\frac{1-4x}{x^2+x+1}$ معرفة من أجل $x^2+x+1\neq 0$.

❖ x^2+x+1 مميزه: $\Delta=-3<0$، وبما أن $a=1>0$ فإن $x^2+x+1>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$. ومنه فإن:

$$\frac{1-4x}{x^2+x+1}\leq 0 \Leftrightarrow 1-4x\leq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{4}$$

إذن مجموعة حلول المتراجحة $\frac{1-4x}{x^2+x+1}\leq 0$ هي: $S=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.

d) $\frac{3x+2}{2x^2+11x-6}$ معرفة من أجل $2x^2+11x-6\neq 0$.

❖ $\Delta=(11)^2-4(2)(-6)=169>0 \Rightarrow x_1=-6\ ;\ x_2=\frac{1}{2}$

إذن جدول إشارة $\frac{3x+2}{2x^2+11x-6}$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-6		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3x+2$		-	$\vert$	-	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2x^2+11x-6$		$+$	0	-	$\vert$	-	0	$+$	
$\frac{3x+2}{2x^2+11x-6}$		-	$\Vert$	$+$	0	-	$\Vert$	$+$	

ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $\frac{3x+2}{2x^2+11x-6}\geq 0$ هي: $S=\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

e) $\frac{-x^2+4x-3}{(x-4)(2-x)}$ معرفة من أجل $(x-4)(2-x)\neq 0$ أي: $x\neq 4\ /\ x\neq 2$.

❖ $-x^2+4x-3$ ثلاثي حدود مميزه:

$\Delta=(4)^2-4(-1)(-3)=4>0 \Rightarrow x_1=3\ ;\ x_2=1$ ،

❖ إذن جدول إشارة $\dfrac{-x^2+4x-3}{(x-4)(2-x)}$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$-x^2+4x-3$		-	0	+	|	+	0	−	|	−	
$(x-4)(2-x)$		-	|	-	0	+	|	+	0	-	
$\dfrac{-x^2+4x-3}{(x-4)(2-x)}$		+	0	-	‖	+	0	-	‖	+	

ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $\dfrac{-x^2+4x-3}{(x-4)(2-x)}\geq 0$ هي: $S=]-\infty;1]\cup]2;3]\cup]4;+\infty[$.

f) $\dfrac{x^2-1}{x^2-6x+8}$ معرفة من أجل $x^2-6x+8\neq 0$.

❖ $\Delta=(-6)^2-4(1)(8)=4>0 \Rightarrow x_1=2\ ;\ x_2=4$.

❖ $x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=1\ /\ x=-1$.

❖ إذن جدول إشارة $\dfrac{x^2-1}{x^2-6x+8}$ يكون كالتالي:

x	-∞		-1		1		2		4		+∞
x^2-1		+	0	-	0	+	|	+	|	+	
x^2-6x+8		+	|	+	|	+	0	-	0	+	
$\dfrac{x^2-1}{x^2-6x+8}$		+	0	-	0	+	‖	-	‖	+	

ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $\dfrac{x^2-1}{x^2-6x+8}>0$ هي: $S=]-\infty;-1[\cup]1;2[\cup]4;+\infty[$.

حل التمرين 31:

a) $\sqrt{2x^2-3x+1}=x-1$ معرفة عندما تكون $2x^2-3x+1\geq 0$.

❖ $\Delta=(-3)^2-4(2)(1)=1>0 \Rightarrow x_1=\dfrac{1}{2}\ ;\ x_2=1$

❖ وبما أن $a=2>0$ فإن $D=\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty[$.

❖ $\sqrt{2x^2-3x+1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-3x+1=(x-1)^2\\ x-1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-3x+1=x^2-2x+1\\ x\geq 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x=0\\ x\geq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(x-1)=0\\ x\geq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\ /\ x=1\\ x\geq 1\end{cases} \Leftrightarrow x=1$

❖ بما أن 1 ينتمي لـ D ، فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{2x^2-3x+1}=x-1$ هي: $S=\{1\}$.

b) $\sqrt{2x-1}=1-2x$ معرفة عندما تكون $2x-1\geq 0$ أي: $x\geq\dfrac{1}{2}$. ومنه فإن: $D=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

❖ $\sqrt{2x-1}=1-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=(1-2x)^2 \\ 1-2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=1-4x+4x^2 \\ x\le \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-6x+2=0 \\ x\le \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2x^2-3x+1)=0 \\ x\le \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x+1=0 \\ x\le \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$

❖ $\Delta=(-3)^2-4(2)(1)=1>0 \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\ ;\ x_2=1$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1\ /\ x=\frac{1}{2} \\ x\le \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

❖ بما أن $\frac{1}{2}$ ينتمي لـ D، فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{2x-1}=1-2x$ هي: $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

c) $\sqrt{x^2-8}=2x-5$ معرفة عندما تكون $x^2-8\ge 0$

❖ $x^2-8=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{8}\ /\ x=-\sqrt{8}$

وبما أن $a=1>0$ فإن: $D=\left]-\infty;-\sqrt{8}\right]\cup\left[\sqrt{8};+\infty\right[$.

❖ $\sqrt{x^2-8}=2x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8=(2x-5)^2 \\ 2x-5\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8=4x^2-20x+25 \\ 2x\ge 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-20x+33=0 \\ x\ge \frac{5}{2} \end{cases} \quad (1)$

❖ $\Delta=(-20)^2-4(3)(33)=4>0 \Rightarrow x_1=3\ ;\ x_2=\frac{11}{3}$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\ /\ x=\frac{11}{3} \\ x\ge \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=3\ /\ x=\frac{11}{3}$

❖ بما أن 3 و $\frac{11}{3}$ ينتميان لـ D، فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{x^2-8}=2x-5$ هي: $S=\left\{3;\frac{11}{3}\right\}$.

d) $\sqrt{2x+1}=x-1$ معرفة عندما تكون $2x+1\ge 0$ أي: $x\ge -\frac{1}{2}$ ومنه فإن: $D=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

❖ $\sqrt{2x+1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=(x-1)^2 \\ x-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=x^2-2x+1 \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x=0 \\ x\ge 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4)=0 \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\ /\ x=4 \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$

❖ بما أن 4 ينتمي لـ D ، فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{2x+1}=x-1$ هي: $S=\{4\}$.

e) $\sqrt{3\left(x^2-1\right)}\leq 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ x^2-1\geq 0 \\ 3\left(x^2-1\right)\leq (2x-1)^2 \end{cases} \qquad (1)$

❖ $2x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{1}{2}$.

❖ $x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x_1=1\ ;\ x_2=-1$.

❖ $3\left(x^2-1\right)=(2x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2-3=4x^2-4x+1 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0$

$\Delta=(-4)^2-4(1)(4)=0 \Rightarrow x_1=x_2=2$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ x^2-1\geq 0 \\ x^2-4x+4\geq 0 \end{cases}$$

إذن جدول إشارة الجملة السابقة يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1		$1/2$		1		2		$+\infty$
x^2-1		+	0	−		−	0	+		+	
$2x-1$		−		−	0	+		+		+	
x^2-4x+4		+		+		+		+	0	+	

❖ ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $\sqrt{3\left(x^2-1\right)}\leq 2x-1$ هي: $S=[1;+\infty[$.

f) $5-x\leq\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x\leq 0 \\ x+1\geq 0 \end{cases} (1)$ أو $\begin{cases} 5-x\geq 0 \\ x+1\geq 0 \\ (5-x)^2\leq x+1 \end{cases} \qquad (2)$

❖ $\begin{cases} 5-x=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-1 \end{cases}$

إذن جدول إشارة الجملة (1) يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$5-x$		+		+	0	−	
$x+1$		−	0	+		+	

ومنه فإن مجموعة حلول الجملة (1) هي: $S_1=[5;+\infty[$.

❖ $\begin{cases} 5-x\geq 0 \\ x+1\geq 0 \\ (5-x)^2\leq x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x\geq 0 \\ x+1\geq 0 \\ x^2-11x+24\leq 0 \end{cases}$

$\Delta=(-11)^2-4(1)(24)=25>0 \Rightarrow x_1=3\ ;\ x_2=8$

إذن جدول إشارة الجملة (2) يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1		3		5		8		$+\infty$
$5-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x^2-11x+24$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

ومنه فإن مجموعة حلول الجملة (2) هي: $S_2=[3;5]$.

ومجموعة حلول المتراجحة $5-x\le\sqrt{x+1}$ هي: $S=S_1\cup S_2=[3;+\infty[$.

حل التمرين 32:

a) $\sqrt{x-2}=4\Leftrightarrow x-2=16\Leftrightarrow x=18$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{x-2}=4$ هي: $S=\{18\}$.

b) $5+\sqrt{1-x}=1\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=-4$.

ونعلم أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $\sqrt{x}\ge 0$، ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $5+\sqrt{1-x}=1$ هي: $S=\varnothing$.

c) $\sqrt{-2x-1}-x=8\Leftrightarrow\sqrt{-2x-1}=x+8$.

$\sqrt{-2x-1}=x+8$ معرفة من أجل $-2x-1\ge 0$.

❖ $-2x-1\ge 0\Leftrightarrow x\le-\dfrac{1}{2}$.

ومنه فإن $D=\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$.

$$\sqrt{-2x-1}=x+8\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-1=(x+8)^2\\ x+8\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-1=x^2+16x+64\\ x\ge-8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+18x+65=0\\ x\ge-8\end{cases}\quad(1)$$

❖ $\Delta=(18)^2-4(1)(65)=64>0\Rightarrow x_1=\dfrac{-18-8}{2}=-13\ ;\ x_1=\dfrac{-18+8}{2}=-5$.

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-13\ ;\ x=-5\\ x\ge-8\end{cases}\Leftrightarrow x=-5$$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{-2x-1}-x=8$ هي: $S=\{-5\}$.

d) $\sqrt{x^2+3x-4}-x>1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3x-4}>x+1$

$$\sqrt{x^2+3x-4}>x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\le 0\\ x^2+3x-4\ge 0\end{cases}\ (1)\ \text{أو}\ \begin{cases}x+1\ge 0\\ x^2+3x-4\ge 0\\ x^2+3x-4>(x+1)^2\end{cases}\ (2)$$

❖ مميزه: x^2+3x-4

$\Delta=(3)^2-4(1)(-4)=25>0\Rightarrow x_1=\dfrac{-3-5}{2}=-4\ ;\ x_1=\dfrac{-3+5}{2}=1$.

إذن جدول إشارة الجملة (1) يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-4		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	$+$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$+$

ومنه فإن مجموعة حلول الجملة (1) هي: $S_1 =]-\infty;-4]$.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2+3x-4 \geq 0 \\ \cancel{x^2}+3x-4 > \cancel{x^2}+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2+3x-4 \geq 0 \\ x > 5 \end{cases}$$

ومنه فإن مجموعة حلول الجملة (2) هي: $S_2 =]5;+\infty[$.

ومجموعة حلول المتراجحة $\sqrt{x^2+3x-4} - x > 1$ هي: $S = S_1 \cup S_2 =]-\infty;-4] \cup]5;+\infty[$.

حل التمرين 33:

$$\text{a)}\ \sqrt{1-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \ / \ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{1-x^2} = x$ هي: $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

$$\text{b)}\ \sqrt{x^2+5} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5 = (x+1)^2 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x^2}+5 = \cancel{x^2}+2x+1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{x^2+5} = x+1$ هي: $S = \{2\}$.

$$\text{c)}\ \sqrt{x^2+5x+3} = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+3 = (2x+1)^2 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+3 = 4x^2+4x+1 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2+x+2 = 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

❖ $\Delta = (1)^2 - 4(-3)(2) = 25 > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-1+5}{-6} = -\frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{-1-5}{-6} = 1$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \ / \ x = 1 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{x^2+5x+3} = 2x+1$ هي: $S = \{1\}$.

حل التمرين 34:

a) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=x \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-1=0 \\ x\geq 0 \end{cases}$ (1) .

❖ $\Delta=(-1)^2-4(1)(-1)=5>0 \Rightarrow x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \; / \; x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x}$ هي: $S=\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

b) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=x+1 \\ x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x\geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+1}$ هي: $S=\{2\}$.

c) $\sqrt{x^2+3}=\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3=x+2 \\ x+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1=0 \\ x\geq -2 \end{cases}$ (1) .

❖ $\Delta=(-1)^2-4(1)(1)=-5<0$

$x^2-x+1=0$ ليس لها حلول ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{x^2+3}=\sqrt{x+2}$ هي: $S=\varnothing$.

حل التمرين 35:

a) $\sqrt{x^2-1}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=(x+2)^2 \\ x+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x^2}-1=\cancel{x^2}+4x+4 \\ x\geq -2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-5}{4} \\ x\geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-5}{4}$$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{x^2-1}=x+2$ هي: $S=\left\{-\dfrac{5}{4}\right\}$.

b) $\sqrt{4x-1}=\sqrt{3-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-1=3-x \\ 3-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=4 \\ 3\geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{5} \\ x\leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{5}$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{4x-1}=\sqrt{3-x}$ هي: $S=\left\{\dfrac{4}{5}\right\}$.

c) $\sqrt{4-x}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x=(x-2)^2 \\ x-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{4}-x=x^2-4x+\cancel{4} \\ x\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x=0 \\ x\geq 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3)=0 \\ x\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \; / \; x=3 \\ x\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{4-x}=x-2$ هي: $S=\{3\}$.

حل التمرين 36:

a) $\sqrt{x-4}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=(x+1)^2 \\ x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=x^2+2x+1 \\ x\geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+5=0 \\ x\geq -1 \end{cases}$ (1)

❖ $\Delta=(1)^2-4(1)(5)=-19<0$.

$x^2+x+5=0$ ليس لها حلول ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{x-4}=x+1$ هي: $S=\varnothing$.

b) $\sqrt{x^2-12}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12=(2x-1)^2 \\ 2x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12=4x^2-4x+1 \\ x\geq \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-4x+13=0 \\ x\geq \frac{1}{2} \end{cases}$ (1)

❖ $\Delta=(-4)^2-4(3)(13)=-140<0$

$3x^2-4x+13=0$ ليس لها حلول ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{x^2-12}=2x-1$ هي: $S=\varnothing$.

c) $\sqrt{2x-6}=x-7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6=(x-7)^2 \\ x-7\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6=x^2-14x+49 \\ x\geq 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-16x+55=0 \\ x\geq 7 \end{cases}$ (1)

❖ $\Delta=(-16)^2-4(1)(55)=36>0 \Rightarrow x_1=\frac{16+6}{2}=11 \ / \ x_2=\frac{16-6}{2}=5$.

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=11 \ / \ x=5 \\ x\geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x=11$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{2x-6}=x-7$ هي: $S=\{11\}$.

d) $\sqrt{x+12}=\sqrt{x^2+2x-8} \Leftrightarrow \begin{cases} x+12\geq 0 \\ x^2+2x-8\geq 0 \\ x+12=x^2+2x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -12 \\ x^2+2x-8\geq 0 & (1) \\ x^2+x-20=0 & (2) \end{cases}$

❖ (1): $\Delta=(2)^2-4(1)(-8)=36>0 \Rightarrow x_1=\frac{-2+6}{2}=2 \ ; \ x_2=\frac{-2-6}{2}=-4$.

❖ (2): $\Delta=(1)^2-4(1)(-20)=81>0 \Rightarrow x_1=\frac{-1+9}{2}=4 \ ; \ x_2=\frac{-1-9}{2}=-5$

$\begin{cases} x\geq -12 \\ x^2+2x-8\geq 0 \\ x^2+x-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -12 \\ x\in]-\infty;-4]\cup[2;+\infty[\\ x=4 \ / \ x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow x=4 \ / \ x=-5$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{x+12}=\sqrt{x^2+2x-8}$ هي: $S=\{-5;4\}$.

e) $\sqrt{3x+3}=\sqrt{x^2+x-8} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3\geq 0 \\ x^2+x-8\geq 0 \\ 3x+3=x^2+x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geq 0 \\ x^2+x-8\geq 0 \quad (1) \\ x^2-2x-11=0 \quad (2) \end{cases}$

❖ (1): $\Delta=(1)^2-4(1)(-8)=33>0 \Rightarrow x_1=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}$; $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{33}}{2}$.

❖ (2): $\Delta=(-2)^2-4(1)(-11)=48>0 \Rightarrow x_1=1+2\sqrt{3}$; $x_2=1-2\sqrt{3}$.

$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x^2+x-8\geq 0 \\ x^2-2x-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\in \left]-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{33}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2};+\infty\right[\\ x=1-2\sqrt{3} \ / \ x=1+2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=1+2\sqrt{3}$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{3x+3}=\sqrt{x^2+x-8}$ هي: $S=\{1+2\sqrt{3}\}$.

f) $\sqrt{x^2+x-2}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=(2x+1)^2 \\ 2x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=4x^2+4x+1 \\ x\geq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3x+3=0 \\ x\geq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1=0 \quad (1) \\ x\geq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

❖ $\Delta=(1)^2-4(1)(1)=-3<0$.

$x^2+x+1=0$ ليس لها حلول ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $\sqrt{x^2+x-2}=2x+1$ هي: $S=\varnothing$.

حل التمرين 37:

a) $x-2\leq\sqrt{x^2+4} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\leq 0 \\ x^2+4\geq 0 \end{cases} (1)$ أو $\begin{cases} x-2\geq 0 \\ x^2+4\geq 0 \\ (x-2)^2\leq x^2+4 \end{cases} (2)$

❖ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2\leq 0 \\ x^2+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ x\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x\leq 2$

ومنه فإن مجموعة حلول الجملة (1) هي: $S_1=]-\infty;2]$.

❖ (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2\geq 0 \\ x^2+4\geq 0 \\ (x-2)^2\leq x^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x\in\mathbb{R} \\ \cancel{x^2}-4x+\cancel{4}\leq \cancel{x^2}+\cancel{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x\in\mathbb{R} \\ -4x\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x\in\mathbb{R} \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 2$

ومنه فإن مجموعة حلول الجملة (2) هي: $S_2=[2;+\infty[$.

ومجموعة حلول المتراجحة $x-2\leq\sqrt{x^2+4}$ هي: $S=S_1\cup S_2=\mathbb{R}$.

b) $1-x \le \sqrt{x^2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \le 0 \\ x^2-x \ge 0 \end{cases}$ (1) أو $\begin{cases} 1-x \ge 0 \\ x^2-x \ge 0 \\ (1-x)^2 \le x^2-x \end{cases}$ (2)

❖ $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$.

❖ $x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \ / \ x=1$.

إذن جدول إشارة الجملة (1) يكون كالتالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	$-$
x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

ومنه فإن مجموعة حلول الجملة (1) هي: $S_1 = [1;+\infty[$.

❖ $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \ge 0 \\ x^2-x \ge 0 \\ 1-2x+\cancel{x^2} \le \cancel{x^2}-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \ge 0 \\ x^2-x \ge 0 \\ 1-x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x \in]-\infty;0] \cup [1;+\infty[\\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

ومنه فإن مجموعة حلول الجملة (2) هي: $S_2 = \{1\}$.

ومجموعة حلول المتراجحة $1-x \le \sqrt{x^2-x}$ هي: $S = S_1 \cup S_2 = [1;+\infty[$.

c) $\sqrt{x} \le \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2x-1 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1$.

ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $\sqrt{x} \le \sqrt{2x-1}$ هي: $S = [1;+\infty[$.

d) $x+\sqrt{x^2-5} \le 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-5} \le 5-x$.

❖ $\sqrt{x^2-5} \le 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \ge 0 \\ x^2-5 \ge 0 \\ x^2-5 \le (5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \ge 0 \\ x^2-5 \ge 0 \\ \cancel{x^2}-5 \le 25-10x+\cancel{x^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \ge 0 \\ x^2-5 \ge 0 \\ 30-10x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \ge 0 \\ x^2-5 \ge 0 \\ 10(3-x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \ge 0 \\ x^2-5 \ge 0 \\ 3-x \ge 0 \end{cases}$ (1)

❖ $5-x=0 \Leftrightarrow x=5$.

❖ $3-x=0 \Leftrightarrow x=3$.

❖ $x^2-5=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0$.

إذن جدول إشارة الجملة (1) يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		3		5		$+\infty$
$5-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	$-$
x^2-5		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	$+$
$3-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	$-$

ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $x+\sqrt{x^2-5}\leq 5$ هي: $S=\left]-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};3\right]$.

e) $2x-3\geq\sqrt{x^2-5x+4}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-5x+4}\leq 2x-3$.

❖ $2x-3\geq\sqrt{x^2-5x+4}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3\geq 0\\x^2-5x+4\geq 0\\(2x-3)^2\geq x^2-5x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3\geq 0\\x^2-5x+4\geq 0\\4x^2-12x+9\geq x^2-5x+4\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3\geq 0\\x^2-5x+4\geq 0 & (1)\\3x^2-7x+5\geq 0 & (2)\end{cases}\quad(3)$$

❖ $2x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

❖ $(1): \Delta=(-5)^2-4(1)(4)=9>0\Rightarrow x_1=\dfrac{5+3}{2}=4\ ;\ x_2=\dfrac{5-3}{2}=1$.

❖ $(2): \Delta=(-7)^2-4(3)(5)=-11<0$

وبما أن $\Delta<0$ و $a=3>0$ فإن $3x^2-7x+5>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

إذن جدول إشارة الجملة (3) يكون كالتالي:

x	$-\infty$	1		$3/2$		4		$+\infty$
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	$+$
x^2-5x+4	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$+$
$3x^2-7x+5$	$+$		$+$		$+$		$+$	$+$

ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $2x-3\geq\sqrt{x^2-5x+4}$ هي: $S=\left[4;+\infty\right[$.

f) $\sqrt{2x-1}>\sqrt{4-x}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1>4-x\\4-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-5>0\\x\leq 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{5}{3}\\x\leq 4\end{cases}$.

ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $\sqrt{2x-1}>\sqrt{4-x}$ هي: $S=\left]\dfrac{5}{3};4\right]$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه