حلول تمارين درس الدوال كثيرات الحدود

فهرس حلول التمارين

حل التمرين 1: 3
حل التمرين 2: 4
حل التمرين 3: 4
حل التمرين 4: 5
حل التمرين 5: 5
حل التمرين 6: 6
حل التمرين 7: 6
حل التمرين 8: 7
حل التمرين 9: 8
حل التمرين 10: 8
حل التمرين 11: 9
حل التمرين 12: 9
حل التمرين 13: 10
حل التمرين 14: 10
حل التمرين 15: 11
حل التمرين 16: 12
حل التمرين 17: 12
حل التمرين 18: 13
حل التمرين 19: 13
حل التمرين 20: 14
حل التمرين 21: 15
حل التمرين 22: 16
حل التمرين 23: 17
حل التمرين 24: 17
حل التمرين 25: 17

Latreche MIFA

حل التمرين 26: 18
حل التمرين 27: 18
حل التمرين 28: 19
حل التمرين 29: 20
حل التمرين 30: 20
حل التمرين 31: 21
حل التمرين 32: 22
حل التمرين 33: 23
حل التمرين 34: 24
حل التمرين 35: 29
حل التمرين 36: 30
حل التمرين 37: 31
حل التمرين 38: 32
حل التمرين 39: 33
حل التمرين 40: 34

Latreche MIFA

حل التمرين 1:

الدالة f معرفة بـ: $f(x)=2(x-2)^2(x+3)$.

1) الدالة f هي جداء الدالتين u و v المعرفتين بـ: $u(x)=(x-2)^2$ و $v(x)=2(x+3)$.

❖ الدالة u مركبة من الدالة $x\to x-2$ وهي دالة تآلفية، إذن فهي معرفة على $\mathbb{R}$، متبوعة بالدالة "مربع" وهي أيضا معرفة على $\mathbb{R}$، ومنه فإن: الدالة u معرفة على $\mathbb{R}$.

❖ الدالة v دالة تآلفية، إذن فهي معرفة على $\mathbb{R}$.

❖ الدالة f هي جداء دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$، ومنه فإن: الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(x)=2(x-2)^2(x+3)=2(x^2-4x+4)(x+3)=2(x^3+3x^2-4x^2-12x+4x+12)$$
$$=2(x^3-x^2-8x+12)=2x^3-2x^2-16x+24$$

عبارة $f(x)$ من الشكل: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$ مع $n=3$، و

$$a_3=2\ ;\ a_2=-2\ ;\ a_1=-16\ ;\ a_0=24$$

نستنتج أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2(x-2)^2(x+3)$ هي كثير حدود من الدرجة 3.

2) الدالة g معرفة بـ: $g(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$.

❖ الدالة g تكون معرفة إذا كان $x^2+1\neq 0$. ونعلم أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، لدينا: $x^2\geq 0$، ومنه فإن: $x^2+1\geq 1$ أي $x^2+1\neq 0$. ومنه فإن: الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، لدينا:

$$g(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}=\frac{(x^2)^2-1^2}{x^2+1}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}=x^2-1$$

عبارة $g(x)$ من الشكل: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$ مع $n=2$، و

$$a_2=1\ ;\ a_1=0\ ;\ a_0=-1$$

نستنتج أن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ هي كثير حدود من الدرجة 2.

3) الدالة h معرفة بـ: $h(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$.

الدالة h تكون معرفة إذا كان $x^2-1\neq 0$. ونعلم أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $x^2-1=0$ عندما يكون $x=-1$ أو $x=1$. ومنه فإن: الدالة h معرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. إذن فهي ليست كثير حدود.

Latreche MIFA

حل التمرين 2:

1) الدالة f معرفة بـ: $f(x)=-3x^4+5x^2-2$.

❖ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

❖ عبارة $f(x)$ هي من الشكل: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$ مع $n=4$ ، و

$$a_4=-3\ ;\ a_3=0\ ;\ a_2=5\ ;\ a_1=0\ ;\ a_0=-2$$

نستنتج أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-3x^4+5x^2-2$ هي كثير حدود من الدرجة 4.

2) الدالة g معرفة بـ: $g(x)=\dfrac{-3x^4+5x^2-2}{3x}$.

الدالة g معرفة عندما يكون $x\neq 0$ ، أي أنها معرفة على $\mathbb{R}^*$ ، ومنه فهي ليست كثير حدود.

3) الدالة h معرفة بـ: $h(x)=\sqrt{-3x^4+5x^2-2}$.

❖ الدالة h تكون معرفة إذا كان $-3x^4+5x^2-2\geq 0$ ، ونلاحظ أنه إذا عوضنا x بـ: 0، فإننا نتحصل على: $-2\geq 0$ وهذه عبارة غير مقبولة.

❖ نستنتج أن الدالة h ليست كثير حدود لأنها غير معرفة على $\mathbb{R}$.

4) الدالة k معرفة بـ: $k(x)=\left|-3x^4+5x^2-2\right|$. نلاحظ أن:

❖ $k(x)=-3x^4+5x^2-2$ عندما يكون $-3x^4+5x^2-2\geq 0$ ،

❖ $k(x)=3x^4-5x^2+2$ عندما يكون $-3x^4+5x^2-2<0$ ،

أي أن معاملاتها غير ثابتة. ومنه نستنتج أن: الدالة k ليست كثير حدود.

حل التمرين 3:

الدالة f معرفة بـ: $f(x)=\alpha x^2+5x-1$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ ، والدالة g معرفة بـ: $g(x)=2x-3$.

❖ الدالة f هي كثير حدود من الدرجة 2، والدالة g هي كثير حدود من الدرجة 1 جذره هو: $\dfrac{3}{2}$.

❖ لكي يكون $f(x)$ قابلا للقسمة على $g(x)$ ، يجب أن يكون: $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$ (أي $\dfrac{3}{2}$ جذر لـ $f(x)$).

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=0\Leftrightarrow\alpha\left(\frac{3}{2}\right)^2+5\left(\frac{3}{2}\right)-1=0\Leftrightarrow\frac{9}{4}\alpha+\frac{15}{2}-1=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{1-\frac{15}{2}}{\frac{9}{4}}\Leftrightarrow\alpha=-\frac{26}{9}$$

نستنتج أن $f(x)=\alpha x^2+5x-1$ قابل للقسمة على $g(x)=2x-3$ إذا وفقط إذا كان $\alpha=-\dfrac{26}{9}$.

حل التمرين 4:

f كثير حدود معرف بـ: $f(x)=(m^2-m)x^4+(2m-2)x^3+mx^2+(m-3)x+5$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، لدينا:

$$\begin{aligned}f(x)&=(m^2-m)x^4+(2m-2)x^3+mx^2+(m-3)x+5\\&=m(m-1)x^4+2(m-1)x^3+mx^2+(m-3)x+5\end{aligned}$$

❖ لكي يكون f كثير حدود من الدرجة 4 يجب أن يكون $m(m-1)\neq 0$. أي $m\neq 0$ أو $m\neq 1$.

❖ نستنتج مايلي:

- من أجل كل $m\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$، f كثير حدود من الدرجة 4.
- من أجل كل $m=0$، $f(x)=-2x^3-3x+5$، أي أن f كثير حدود من الدرجة 3.
- من أجل كل $m=1$، $f(x)=x^2-2x+5$، أي أن f كثير حدود من الدرجة 2.

حل التمرين 5:

❖ f كثير حدود من الدرجة 3 معناه أن: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ حيث: a، b، c، d أعداد حقيقية مع $a\neq 0$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، لدينا:

$$\begin{aligned}f(x-1)&=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d\\&=a(x-1)(x-1)^2+b(x^2-2x+1)+cx-c+d\\&=(ax-a)(x^2-2x+1)+bx^2-2bx+b+cx-c+d\\&=ax^3-2ax^2+ax-ax^2+2ax-a+bx^2-2bx+b+cx-c+d\\&=ax^3-3ax^2+3ax-a+bx^2-2bx+b+cx-c+d\\&=ax^3+(-3a+b)x^2+(3a-2b+c)x+(-a+b-c+d)\end{aligned}$$

❖ نستنتج أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، لدينا:

$$\begin{aligned}f(x)-f(x-1)&=ax^3+bx^2+cx+d-\left[ax^3+(-3a+b)x^2+(3a-2b+c)x+(-a+b-c+d)\right]\\&=\cancel{ax^3}+bx^2+cx+d-\cancel{ax^3}-(-3a+b)x^2-(3a-2b+c)x-(-a+b-c+d)\\&=\left[b-(-3a+b)\right]x^2+\left[c-(3a-2b+c)\right]x+\left[d-(-a+b-c+d)\right]\\&=3ax^2+(-3a+2b)x+a-b+c\end{aligned}$$

❖ $f(x)-f(x-1)=x^2$ معناه: $3ax^2+(-3a+2b)x+a-b+c=x^2$. بمقارنة معاملات كل درجة نتحصل على:

$$\begin{cases}3a=1\\-3a+2b=0\\a-b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\2b=3\times\frac{1}{3}\\c=b-\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=\frac{1}{2}\\c=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=\frac{1}{2}\\c=\frac{1}{6}\end{cases}$$

❖ نستنتج أن عبارة f تكون كالتالي: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+d$ مع $d\in\mathbb{R}$. أي أنه يوجد عدد لامتناهي من كثيرات الحدود من الدرجة 3 التي تحقق شرط: $f(x)-f(x-1)=x^2$.

حل التمرين 6:

❖ $(2x^2-x+2)(6x^2-2x^4-17+x)$: درجة كثير الحدود هي: 6 والعامل المستقل هو 34-.

❖ $(2x-3)-(5x+2)$: درجة كثير الحدود هي: 1 والعامل المستقل هو 5-.

❖ $(7x^3-2x^2-3)^3$: درجة كثير الحدود هي: 9 والعامل المستقل هو 9-.

حل التمرين 7:

لدينا $P(x)=3x^5-2x^4+x^2+6$ ،

$Q(x)=2x^5-3x(x+2)-4=2x^5-3x^2-6x-4$ ،

$R(x)=4x^3-2x^4+2x+3=-2x^4+4x^3+2x+3$.

1) حساب $(Q+R)-P$:

$$(Q+R)-P=2x^5-3x^2-6x-4+(-2x^4+4x^3+2x+3)-(3x^5-2x^4+x^2+6)$$

$$=2x^5-3x^2-6x-4-\cancel{2x^4}+4x^3+2x+3-3x^5+\cancel{2x^4}-x^2-6$$

أي أن: $(Q+R)-P=-x^5+4x^3-4x^2-4x-7$.

2) ليكن S كثير الحدود الواجب إضافته إلى P للحصول على Q، معناه أن: أي $P+S=Q$:

$$S=Q-P=2x^5-3x^2-6x-4-(3x^5-2x^4+x^2+6)$$

$$=2x^5-3x^2-6x-4-3x^5+2x^4-x^2-6$$

$$=-x^5+2x^4-4x^2-6x-10$$

نستنتج أن كثير الحدود الواجب إضافته إلى P للحصول على Q هو: $S=-x^5+2x^4-4x^2-6x-10$.

3) ليكن T كثير الحدود الواجب إنقاصه من Q للحصول على R، معناه أن: $Q-T=R$، أي:

$$T=Q-R=2x^5-3x^2-6x-4-\left(-2x^4+4x^3+2x+3\right)$$
$$=2x^5-3x^2-6x-4+2x^4-4x^3-2x-3$$
$$=2x^5+2x^4-4x^3-3x^2-8x-7$$

كثير الحدود الواجب إنقاصه من Q للحصول على R هو: $T=2x^5+2x^4-4x^3-3x^2-8x-7$.

4) لنقسم $P(x)=3x^5-2x^4+x^2+6$ على $(x-3)$ باستعمال طريقة هورنر:

	3	-2	0	1	0	6
3		9	21	63	192	576
	3	7	21	64	192	582

حاصل القسمة هو: $3x^4+7x^3+21x^2+64x+192$، وباقي القسمة هو 582 ومنه فإن:

$$P(x)=(x-3)\left(3x^4+7x^3+21x^2+64x+192\right)+\frac{582}{x-3}$$

5) لنقسم $R(x)=-2x^4+4x^3+2x+3$ على x^2-x+1 باستعمال القسمة الإقليدية:

$-2x^4+4x^3+0x^2+2x+3$	x^2-x+1
$-2x^4+2x^3-2x^2$	$-2x^2+2x+4$
$2x^3+2x^2+2x+3$	
$2x^3-2x^2+2x$	
$4x^2+0x+3$	
$4x^2-4x+4$	
$4x-1$	

حاصل القسمة هو: $-2x^2+2x+4$، وباقي القسمة هو $4x-1$، ومنه فإن:

$$R(x)=\left(x^2-x+1\right)\left(-2x^2+2x+4\right)+\frac{4x-1}{x^2-x+1}$$

حل التمرين 8:

1) $-4x(7x-4)\left(3+5x^2\right)=\left(-28x^2+16x\right)\left(3+5x^2\right)$

$$=-84x^2-140x^4+48x+80x^3$$
$$=-140x^4+80x^3-84x^2+48x.$$

2) $-2x(5x+4)-\left(9x^2+7x-12\right)=-10x^2-8x-9x^2-7x+12$

$$=-19x^2-15x+12.$$

3) $(3x-5)(2x+3)-(4x-1)(x+3)=6x^2+9x-10x-15-(4x^2+12x-x-3)$

$=6x^2+9x-10x-15-4x^2-12x+x+3$

$=2x^2-12x-12$.

حل التمرين 9:

1) $(2x^2-x)^2-(-3x+2x^2)^2=(4x^4-4x^3+x^2)-(9x^2-12x^3+4x^4)$

$=\cancel{4x^4}-4x^3+x^2-9x^2+12x^3-\cancel{4x^4}$

$=8x^3-8x^2$.

2) $(-4x^3-2x^2)^2=16x^6+16x^5+4x^4$.

3) $(2x-x^2)(x^2-2x)-(3x^2-x)^2=2x^3-4x^2-x^4+2x^3-(9x^4-6x^3+x^2)$

$=2x^3-4x^2-x^4+2x^3-9x^4+6x^3-x^2$

$=-10x^4+10x^3-5x^2$.

4) $(5x+1)(25x^2+1)(5x-1)=(25x^2-1)(25x^2+1)=625x^4-1$.

5) $(3x-4)^3=(3x-4)(3x-4)^2=(3x-4)(9x^2-24x+16)$

$=27x^3-72x^2+48x-36x^2+96x-64$

$=27x^3-108x^2+144x-64$.

حل التمرين 10:

1) باستعمال طريقة هورنر، باقي قسمة كثير الحدود $3x^2-2x+5$ على $x-2$ هو 0. خطأ.

لأن: $3(2)^2-2(2)+5=12-4+5=13\neq 0$، أي أن 2 ليس جذرا لثلاثي الحدود $3x^2-2x+5$.

2) في كثير الحدود $x^2+1-6x+7$، مجموع جذريه هو -6، وجداؤهما هو 7. خطأ.

لأن: $x^2+1-6x+7=x^2-6x+8$، أي أن: مجموع جذريه هو 6، وجداؤهما هو 8.

3) مجموعة حلول المعادلة $5x(x-3)(x+1)=0$ هي: $S=\{-5;-1;3\}$. خطأ.

مجموعة حلول المعادلة $5x(x-3)(x+1)=0$ هي: $S=\{-1;0;3\}$.

حل التمرين 11:

1) لدينا كثير الحدود $2x^3-7x^2+8x-4$.

ملاحظة: الجذر الظاهر لكثير حدود هو أحد قواسم العامل المستقل. إذن في مثالنا هذا، الجذر الظاهر لكثير الحدود $2x^3-7x^2+8x-4$ يكون أحد عناصر المجموعة: $\{-4;-2;-1;1;2;4\}$.

❖ نلاحظ أن 2 هو جذر لـ $2x^3-7x^2+8x-4$ لأن:

$$2(2)^3-7(2)^2+8(2)-4=16-28+16-4=32-32=0$$

❖ لنقسم $2x^3-7x^2+8x-4$ على $(x-2)$ باستعمال طريقة هورنر:

	2	-7	8	-4
2		4	-6	4
	2	-3	2	0

حاصل القسمة هو: $2x^2-3x+2$، وباقي القسمة هو 0، ومنه فإن:

$$2x^3-7x^2+8x-4=(x-2)(2x^2-3x+2)$$

2) لدينا كثير الحدود x^2+x-12.

❖ نلاحظ أن مجموع جذري كثير الحدود هو: $S=-1$، وجداءهما هو: $P=-12$.

❖ نلاحظ أيضا أن 3 هو حل ظاهر لكثير الحدود x^2+x-12، لأن: $3^2+3-12=9+3-12=0$.

❖ بتعويض $x_1=3$ في S، نتحصل على: $x_2=-1-x_1=-1-3=-4$ $\Leftrightarrow x_1+x_2=-1$.

❖ إذن: $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$.

ملاحظة: يمكن أيضا تعويض $x_1=3$ في P، ونتحصل على نفس النتيجة.

3) لنحلل: $16x^3+36x+48x^2$ و $4x^2(x-3)+16(3-x)$ باستعمال الجداءات الشهيرة:

❖ $16x^3+36x+48x^2=4x(4x^2+12x+9)=4x(2x+3)^2$.

❖ $4x^2(x-3)+16(3-x)=4x^2(x-3)-16(x-3)$

$=4(x-3)(x^2-4)$

$=4(x-3)(x-2)(x+2)$.

حل التمرين 12:

1) $3x^3-30x^2+72x=3x(x^2-10x+24)$.

❖ نلاحظ أن 4 هي جذر لثلاثي الحدود $x^2-10x+24$، لأن: $4^2-10\times4+24=16-40+24=0$.

❖ مجموع جذري $x^2-10x+24$ هو: $S=10$، بتعويض $x_1=4$ في S، نتحصل على: $x_2=6$. أي أن:
$x^2-10x+24=(x-4)(x-6)$.

ومنه فإن: $3x^3-30x^2+72x=3x(x-4)(x-6)$.

2) $(4x^2-1)^2-(3x^2+3)^2=[4x^2-1-(3x^2+3)][4x^2-1+(3x^2+3)]$

$=(x^2-4)(7x^2+2)$

$=(x-2)(x+2)(7x^2+2)$.

3) $162x^6-144x^4+32x^2=2x^2(81x^4-72x^2+16)=2x^2(9x^2-4)^2$

$=2x^2[(3x-2)(3x+2)]^2$

$=2x^2(3x-2)^2(3x+2)^2$.

4) نلاحظ أن 1 هو جذر ظاهر لـ $4x^3-8x^2+5x-1$، ومنه فإنه باستعمال طريقة هورنر، نتحصل على:
$4x^3-8x^2+5x-1=(x-1)(4x^2-4x+1)=(x-1)(2x-1)^2$.

حل التمرين 13:

1) $A(x)=x^3+2x-3$ و $B(x)=x-1$.

x^3+0x^2+2x-3	$x-1$
x^3-x^2	x^2+x+3
x^2+2x-3	
x^2-x	
$3x-3$	
$3x-3$	
0	

ومنه فإن: حاصل قسمة x^3+2x-3 على $x-1$ هو: x^2+x+3، أي أن: $A(x)=(x-1)(x^2+x+3)$.

بنفس الطريقة نواصل بقية التمرين:

2) حاصل قسمة x^3-1 على $x+1$ هو: x^2-x+1، أي أن: $A(x)=(x+1)(x^2-x+1)$.

3) حاصل قسمة $3x^2+2x-5$ على $x-1$ هو: $3x+5$، أي أن: $A(x)=(x-1)(3x+5)$.

حل التمرين 14:

P هو كثير حدود معرف بـ: $P(x)=x^4-5x^3+13x^2-19x+10$.

(1

❖ $P(1)=1^4-5\times1^3+13\times1^2-19\times1+10=1-5+13-19+10=0$.

❖ $P(2)=2^4-5\times2^3+13\times2^2-19\times2+10=16-40+52-38+10=0$.

2) بما أن $P(1)=0$ و $P(2)=0$، فإنه يمكن كتابة:

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)(x-2)(ax^2+bx+c)\\&=(x^2-3x+2)(ax^2+bx+c)\\&=ax^4+bx^3+cx^2-3ax^3-3bx^2-3cx+2ax^2+2bx+2c\\&=ax^4+(b-3a)x^3+(c-3b+2a)x^2+(2b-3c)x+2c\quad(1)\end{aligned}$$

بمقارنة (1) مع $P(x)$ نتحصل على: $c=5$; $b=-2$; $a=1$، أي x^2-2x+5 وهو ثلاثي حدود مميزه سالب، أي لا يمكن تحليله. ومنه فإن: $P(x)=(x-1)(x-2)(x^2-2x+5)$.

حل التمرين 15:

1) P كثير حدود معرف بـ: $P(x)=2x^3-3x^2+1$.

❖ $P(1)=2\times1^3-3\times1^2+1=2-3+1=0$.

❖ $P(1)=0$، إذن باستعمال القسمة الإقليدية أو طريقة هورنر، نتحصل على:

$$P(x)=(x-1)(2x^2-x-1)$$

❖ نلاحظ أن 1 هو جذر ظاهر لثلاثي الحدود $2x^2-x-1$، إذن باستعمال القسمة الإقليدية أو طريقة هورنر مرة أخرى، نتحصل على: $2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$.

❖ من هنا نستنتج أن: $P(x)=(x-1)^2(2x+1)$.

2) Q كثير حدود معرف بـ: $Q(x)=x^4+2x^2-8x+5$.

❖ $Q(1)=1^4+2\times1^2-8\times1+5=1+2-8+5=0$.

❖ $Q(1)=0$، إذن باستعمال القسمة الإقليدية أو طريقة هورنر، نتحصل على:

$$Q(x)=(x-1)(x^3+x^2+3x-5)$$

❖ نلاحظ أن 1 هو جذر ظاهر لكثير الحدود x^3+x^2+3x-5، إذن باستعمال القسمة الإقليدية أو طريقة هورنر مرة أخرى، نتحصل على: $x^3+x^2+3x-5=(x-1)(x^2+2x+5)$.

❖ x^2+2x+5 هو ثلاثي حدود مميزه سالب إذن لا يمكن تحليله، ومنه نستنتج أن:

$$Q(x)=(x-1)^2(x^2+2x+5)$$

حل التمرين 16:

P كثير حدود معرف بـ: $P(x)=2x^3+11x^2+18x+14$.

نستعمل القسمة الإقليدية لإثبات أن $P(x)$ قابل للقسمة على $2x+7$:

$2x^3+11x^2+18x+14$	$2x+7$
$2x^3+7x^2$	x^2+2x+2
$4x^2+18x+14$	
$4x^2+14x$	
$4x+14$	
$4x+14$	
0	

$P(x)$ قابل للقسمة على $2x+7$ لأن باقي القسمة الإقليدية هو 0. حاصل القسمة هو x^2+2x+2 وهو ثلاثي حدود مميزه سالب إذن فهو لا يقبل التحليل. ومنه فإن: $P(x)=(2x+7)(x^2+2x+2)$.

حل التمرين 17:

P كثير حدود معرف بـ: $P(x)=12x^5+23x^4-135x^3-135x^2+23x+12$.

❖ $P(-1)=12(-1)^5+23(-1)^4-135(-1)^3-135(-1)^2+23(-1)+12$

$=-12+23+135-135-23+12=0$.

❖ $P(3)=12(3)^5+23(3)^4-135(3)^3-135(3)^2+23(3)+12$

$=2916+1863-3645-1215+69+12=0$.

❖ $P(-4)=12(-4)^5+23(-4)^4-135(-4)^3-135(-4)^2+23(-4)+12$

$=-12288+5888+8640-2160-92+12=0$.

❖ $P(-4)=0$; $P(3)=0$; $P(-1)=0$، إذن: $P(x)=(x+1)(x-3)(x+4)(ax^2+bx+c)$.

❖ $(x+1)(x-3)(x+4)=x^3+2x^2-11x-12$. باستعمال القسمة الإقليدية أو طريقة المقارنة، نتحصل على: $P(x)=(x+1)(x-3)(x+4)(12x^2-x-1)$.

❖ $12x^2-x-1$ هو ثلاثي حدود مميزه $\Delta=49$، ومنه فإن جذراه هما: $x_1=\frac{1}{3}$ و $x_2=-\frac{1}{4}$، ومنه فإن:

$12x^2-x-1=12\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=(3x-1)(4x+1)$.

❖ من هنا نستنتج أن: $P(x)=(x+1)(x-3)(x+4)(3x-1)(4x+1)$.

حل التمرين 18:

P كثير حدود معرف بـ: $P(x)=6x^6+35x^5+56x^4-56x^2-35x-6$.

❖ $P(1)=6(1)^6+35(1)^5+56(1)^4-56(1)^2-35(1)-6=6+35+56-56-35-6=0$.

$P(1)=0$ معناه أن 1 هو جذر لـ $P(x)$.

❖ باستعمال طريقة هورنر مرة أولى نتحصل على:

	6	35	56	0	-56	-35	-6
1		6	41	97	97	41	6
	6	41	97	97	41	6	0

حاصل القسمة هو: $6x^5+41x^4+97x^3+97x^2+41x+6$، وباقي القسمة هو 0، ومنه فإن:

$$P(x)=(x-1)\left(6x^5+41x^4+97x^3+97x^2+41x+6\right)$$

❖ نلاحظ أن (-1) هو جذر ظاهر لكثير الحدود $6x^5+41x^4+97x^3+97x^2+41x+6$، إذن باستعمال طريقة هورنر مرة أخرى، نتحصل على: $P(x)=(x-1)(x+1)\left(6x^4+35x^3+62x^2+35x+6\right)$.

❖ نلاحظ أن (-2) هو جذر ظاهر لكثير الحدود $6x^4+35x^3+62x^2+35x+6$، إذن باستعمال طريقة هورنر مرة أخرى، نتحصل على: $P(x)=(x-1)(x+1)(x+2)\left(6x^3+23x^2+16x+3\right)$.

❖ نلاحظ أن (-3) هو جذر ظاهر لكثير الحدود $6x^3+23x^2+16x+3$، إذن باستعمال طريقة هورنر مرة أخرى، نتحصل على: $P(x)=(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)\left(6x^2+5x+1\right)$.

❖ $6x^2+5x+1$ هو ثلاثي حدود مميزه $\Delta=1$، ومنه فإن جذراه هما: $x_1=-\frac{1}{3}$ و $x_2=-\frac{1}{2}$، ومنه فإن:

$$6x^2+5x+1=6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(3x+1)(2x+1).$$

❖ من هنا نستنتج أن: $P(x)=(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)(3x+1)(2x+1)$.

حل التمرين 19:

1) لدينا العبارات التالية: $2x^2+4x-30$، $2\left[(x+1)^2-16\right]$ و $2(x-3)(x+5)$.

❖ $2\left[(x+1)^2-16\right]=2\left[(x+1)-4\right]\left[(x+1)+4\right]=2(x-3)(x+5)$

$=2\left(x^2+2x-15\right)=2x^2+4x-30$.

❖ $2(x-3)(x+5)=2\left(x^2+2x-15\right)=2x^2+4x-30$.

ومنه فإن: $2\left[(x+1)^2-16\right]=2(x-3)(x+5)=2x^2+4x-30$.

❖ لحساب $f(0)$ ، نستعمل عبارة: $f(x)=2x^2+4x-30$. فنتحصل على: $f(0)=-30$.

❖ لحساب $f(3)$ و $f(-5)$ ، نستعمل عبارة: $f(x)=2(x-3)(x+5)$. فنتحصل على:

$$f(3)=0 \text{ ، و } f(-5)=0$$

❖ لحساب $f(-1)$ ، نستعمل عبارة $f(x)=2\left[(x+1)^2-16\right]$ ، فنتحصل على:

$$f(-1)=2(-16)=-32$$

❖ لحساب $f(-2)$ ، نستعمل أي عبارة من عبارات $f(x)$ ، فنتحصل على:

$$f(-2)=2(-2)^2+4(-2)-30=8-8-30=-30$$

(2

❖ $(x+2)^2+1=x^2+4x+4+1=x^2+4x+5$.

إذن: x^2+4x+5 و $(x+2)^2+1$ تمثلان نفس ثلاثي الحدود g.

❖ لنأخذ عبارة $g(x)=(x+2)^2+1$.

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا: $(x+2)^2\geq 0$ ، أي: $(x+2)^2+1\geq 1$ أي $(x+2)^2+1>0$. ومنه فإنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا: $g(x)>0$.

❖ لنأخذ عبارة $g(x)=x^2+4x+5$. g هو ثلاثي حدود مميزه سالب ومنه فإنه لا يمكن تحليل g.

حل التمرين 20:

ملاحظة: الشكل النموذجي لثلاثي حدود f هو: $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ مع $a\neq 0$ ، ويمكن كتابته أيضا: $a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ حيث: $\alpha=-\frac{b}{2a}$ ، و $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

1) العبارة $2x^2+3x-1$ هي من الشكل ax^2+bx+c ، إذن فهي عبارة مرتبة ومختزلة لثلاثي حدود وليست الشكل النموذجي لثلاثي حدود.

2) العبارة $3(x-1)^2+4$ هي من الشكل: $a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ مع: $a=3$; $\alpha=1$; $\beta=4$. إذن فهي بالفعل تمثل شكل نموذجي لثلاثي حدود.

3) العبارة $(x+7)(2x-5)$ ليست من الشكل: $a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ ، إذن فهي لا تمثل شكل نموذجي لثلاثي حدود، بل تمثل تحليلا لثلاثي حدود.

4) العبارة $-(x+3)^2-7$ هي من الشكل: $a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ مع: $a=-1$; $\alpha=-3$; $\beta=-7$. إذن فهي بالفعل تمثل شكل نموذجي لثلاثي حدود.

5) العبارة $-4(x-9)^2$ يمكن كتابتها: $-4(x-9)^2+0$، فهي إذن من الشكل: $a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ مع: $a=-4$; $\alpha=9$; $\beta=0$. إذن فهي بالفعل تمثل شكل نموذجي لثلاثي حدود. كما أنها تمثل، في نفس الوقت، تحليلا له.

6) العبارة $2x^2-5$ يمكن كتابتها: $2(x-0)^2+(-5)$، فهي إذن من الشكل: $a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ مع: $a=2$; $\alpha=0$; $\beta=-5$. إذن فهي بالفعل تمثل شكل نموذجي لثلاثي حدود.

حل التمرين 21:

1) ليكن $f(x)=2x^2+7x+3$. f من الشكل ax^2+bx+c، مع: $a=2$; $b=7$; $c=3$.

الشكل النموذجي لثلاثي الحدود f هو: $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ مع $a\neq 0$.

- $\frac{b}{2a}=\frac{7}{2\times 2}=\frac{7}{4}$.
- $\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{7^2-4\times 2\times 3}{4\times 2^2}=\frac{49-24}{16}=\frac{25}{16}$.
- $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=2\left[\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]=2\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$.

إذن: الشكل النموذجي لثلاثي الحدود $2x^2+7x+3$ هو: $2\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$.

بنفس الطريقة نكمل بقية التمرين.

2) الشكل النموذجي لثلاثي الحدود $3x^2-10x-8$ هو: $3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{49}{3}$.

3) الشكل النموذجي لثلاثي الحدود $-x^2+4x-5$ هو: $-(x-2)^2-1$.

Latreche MIFA

حل التمرين 22:

1) ليكن $f(x)=x^2+5x-14$. f من الشكل ax^2+bx+c ، مع: $a=1$; $b=5$; $c=-14$.

الشكل النموذجي لثلاثي الحدود f هو: $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ مع $a\neq 0$.

- $\frac{b}{2a}=\frac{5}{2\times 1}=\frac{5}{2}$.
- $\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{5^2-4\times 1\times(-14)}{4\times 1^2}=\frac{25+56}{4}=\frac{81}{4}$.
- $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=1\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{81}{4}\right]=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{81}{4}$.

إذن: $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{81}{4}$ هو الشكل النموذجي لثلاثي الحدود $x^2+5x-14$.

- $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{81}{4}=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{9}{2}\right)^2=\left(x+\frac{5}{2}-\frac{9}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}+\frac{9}{2}\right)$
$=\left(x-\frac{4}{2}\right)\left(x+\frac{14}{2}\right)=(x-2)(x+7)$.

إذن: $(x-2)(x+7)$ هو تحليل لـ $x^2+5x-14$.

بنفس الطريقة نكمل بقية التمرين.

2) $-3x^2+3x+36$

- $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$ هو الشكل النموذجي لثلاثي الحدود $-3x^2+3x+36$.
- $-3(x-4)(x+3)$ هو تحليل لـ $-3x^2+3x+36$.

3) $2x^2+4x+7$

- $2(x+1)^2+5$ هو الشكل النموذجي لثلاثي الحدود $2x^2+4x+7$.
- $2(x+1)^2+5\Leftrightarrow 2(x+1)^2=-5$.

وهي عبارة غير مقبولة لأنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا $2(x+1)^2\geq 0$.

ومنه فإنه لا يمكن تحليل $2x^2+4x+7$.

Latreche MIFA

حل التمرين 23:

1) g كثير حدود شكله النموذجي هو: $g(x)=3\left[(x-1)^2-9\right]$.

❖ $g(x)=3\left[(x-1)^2-9\right]=3\left(x^2-2x+1-9\right)=3\left(x^2-2x-8\right)=3x^2-6x-24$.

❖ $g(x)=3\left[(x-1)^2-9\right]=3\left[(x-1)-3\right]\left[(x-1)+3\right]=3(x-4)(x+2)$.

إذن: $3x^2-6x-24$ هو الشكل المنشور والمرتب لـ g، و $3(x-4)(x+2)$ هو تحليل لـ g.

2)

❖ لحساب $g(0)$ نستعمل الشكل المنشور لـ g، فنتحصل على: $g(0)=-24$.

❖ لحساب $g(1)$ نستعمل الشكل النموذجي لـ g، فنتحصل على: $g(1)=-27$.

❖ لحساب $g(4)$ نستعمل تحليل g، فنتحصل على: $g(4)=0$.

❖ لحساب $g\left(\sqrt{2}\right)$ نستعمل أي شكل من أشكال g، فنتحصل على: $g\left(\sqrt{2}\right)=-18-6\sqrt{2}$.

3) لحل المعادلة $g(x)=0$، نستعمل تحليل g، فنتحصل على:

$g(x)=0\Leftrightarrow 3(x-4)(x+2)=0$ أي $x-4=0$ أو $x+2=0$، أي $x=4$ أو $x=-2$. إذن مجموعة حلول المعادلة $g(x)=0$ هي: $S=\{-2;4\}$.

حل التمرين 24:

ليكن P كثير الحدود المعرف بـ: $P(x)=-x^2+2x+1$.

$$P\left(1-\sqrt{2}\right)=-\left(1-\sqrt{2}\right)^2+2\left(1-\sqrt{2}\right)+1=-\left(1-2\sqrt{2}+2\right)+2\left(1-\sqrt{2}\right)+1$$
$$=-3+\cancel{2\sqrt{2}}+2-\cancel{2\sqrt{2}}+1=0.$$

$P\left(1-\sqrt{2}\right)=0$ معناه أن $1-\sqrt{2}$ هو جذر لـ $-x^2+2x+1$.

حل التمرين 25:

لكي يكون 1 و (-3) جذران لثلاثي حدود، يجب أن يكون تحليله من الشكل: $a(x-1)(x+3)$ مع $a\in\mathbb{R}$ و $a\neq 0$.

بأخذ $a=1$، نتحصل على:

$f(x)=(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$، وهو ثلاثي حدود جذراه 1 و (-3).

Latreche MIFA

حل التمرين 26:

1) f كثير حدود معرف بـ: $f(x)=2x^2-8x-4$.

❖ 1 هو جذر لـ f. خطأ لأن: $f(1)\neq 0$ فـ: $f(1)=2\times 1^2-8\times 1-4=2-8-4=-10$.

❖ (-1) هو جذر لـ f. خطأ لأن: $f(-1)\neq 0$ فـ: $f(-1)=2(-1)^2-8(-1)-4=2+8-4=6$.

❖ $2\left[(x-2)^2-6\right]$ هو الشكل النموذجي لـ f. صحيح لأن:

$$2\left[(x-2)^2-6\right]=2\left(x^2-4x+4-6\right)=2\left(x^2-4x-2\right)=2x^2-8x-4=f(x)$$

2) g كثير حدود معرف بـ: $g(x)=2(x-3)(x+2)$.

❖ 2 هو جذر لـ g. خطأ لأن: $g(2)\neq 0$ فـ: $g(2)=2(2-3)(2+2)=2(-1)\times 4=-8$.

❖ $g(4)=12$. صحيح لأن: $g(4)=2(4-3)(4+2)=2\times 1\times 6=12$.

❖ $4x^2-4x-24$ هو نشر لـ g. خطأ لأن:

$$g(x)=2(x-3)(x+2)=2\left(x^2+2x-3x-6\right)=2x^2-2x-12$$

حل التمرين 27:

f كثير حدود معرف بـ: $f(x)=x^3+x^2-7x+5$.

1) $f(1)=1^3+1^2-7\times 1+5=1+1-7+5=0$.

2) بما أن $f(1)=0$ ، فإنه يمكن كتابة $f(x)=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$.

$$f(x)=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c$$
$$=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$$

لكي يكون $ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$ و x^3+x^2-7x+5 متساويان، يجب أن تكون معاملات حدودهما من نفس الدرجة متساوية، ومنه فإن:

$$\begin{cases} a=1 \\ b-a=1 \\ c-b=-7 \\ -c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1+a \\ c=-7+b \\ c=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-5 \\ c=-5 \end{cases}$$

نستنتج أن: $f(x)=(x-1)\left(x^2+2x-5\right)$.

ملاحظة: لو أننا تحصلنا على قيمتين مختلفتين لـ c في الجملة السابقة، فهذا معناه أنه لا يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$.

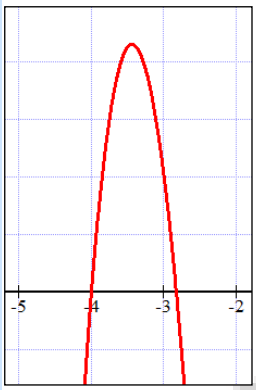
حل التمرين 28:

f كثير حدود معرف بـ: $f(x)=2x^3+8x^2-16x-64$.

(1

❖ نعلم أن الجذر الظاهر لثلاثي حدود هو دائما أحد قواسم عامله المستقل عن x ، وفي مثالنا هذا، لكي يكون α جذرا ظاهرا لـ $f(x)$ ، يجب أن يكون من قواسم العدد (-64) ، أي يجب أن ينتمي للمجموعة: $\{-64;-32;-16;-4;-2;-1;1;2;4;16;32;64\}$.

❖ بإجراء جدول قيم لـ $f(x)$ ، أو باستعمال حاسبة أو جهاز كمبيوتر لرسم التمثيل البياني للدالة f، نلاحظ أن $\alpha=-4$ هو حل ظاهر لـ $f(x)$. والرسم المقابل يبين ذلك. لنتأكد من ذلك حسابيا:



$$f(-4)=2(-4)^3+8(-4)^2-16(-4)-64=-128+128+64-64=0$$

إذن $\alpha=-4$ هو الحل الظاهر لـ $f(x)$.

2) بما أن $f(-4)=0$ فإنه يمكن كتابة $f(x)=(x+4)(ax^2+bx+c)$.

$$f(x)=(x+4)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx+4ax^2+4bx+4c$$
$$=ax^3+(b+4a)x^2+(c+4b)x+4c \quad (1)$$

بمقارنة (1) مع $2x^3+8x^2-16x-64$ ، نتحصل على:

$$\begin{cases} a=2 \\ b+4a=8 \\ c+4b=-16 \\ 4c=-64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=8-4a \\ c=-16-4b \\ c=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=-16 \end{cases}$$

نستنتج أن: $f(x)=(x+4)(2x^2-16)$.

3) لإيجاد جميع جذور $f(x)$ ، يجب حل المعادلة: $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow (x+4)(2x^2-16)=0 \Leftrightarrow 2(x+4)(x^2-8)=0$ أي أن $x+4=0$ أو $x^2-8=0$ أي $x=-4$ أو $(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})=0$ أي $x=2\sqrt{2}$ أو $x=-2\sqrt{2}$.

نستنتج أن جذور $f(x)$ هي: (-4) ، $(-2\sqrt{2})$ و $2\sqrt{2}$.

حل التمرين 29:

1) $(x-\alpha)^2+\beta=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta$. (1)

بمقارنة (1) مع x^2-4x+2 ، نتحصل على:

$$\begin{cases}-2\alpha=-4\\ \alpha^2+\beta=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=2-\alpha^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=-2\end{cases}$$

إذن يمكننا كتابة: $x^2-4x+2=(x-2)^2-2$.

2) لدينا:

$$x^2-4x+2=(x-2)^2-2=\left(x-2-\sqrt{2}\right)\left(x-2+\sqrt{2}\right)$$

ومنه فإن: $\left(x-2-\sqrt{2}\right)\left(x-2+\sqrt{2}\right)$ هو تحليل لـ x^2-4x+2.

❖ $x^2-4x+2=0\Leftrightarrow\left(x-2-\sqrt{2}\right)\left(x-2+\sqrt{2}\right)=0$ معناه: $x=2+\sqrt{2}$ أو $x=2-\sqrt{2}$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^2-4x+2=0$ هي: $S=\left\{2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right\}$.

3)

❖ نلاحظ أن: $x^2-4x+5=\left(x^2-4x+2\right)+3$ ، وبما أن: $x^2-4x+2=(x-2)^2-2$ ، فإن:

$$x^2-4x+5=(x-2)^2-2+3=(x-2)^2+1$$

أي: $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$.

❖ نعلم أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $(x-2)^2\geq 0$ ، ومنه فإن: $(x-2)^2+1\geq 1$ ، أي $(x-2)^2+1\neq 0$.

ومنه فإن: المعادلة $x^2-4x+5=0$ ليس لها حلول.

حل التمرين 30:

1) $2x^2-4x+8=2\left(x^2-2x+4\right)=2\left[(x-1)^2-1+4\right]=2\left[(x-1)^2+3\right]$.

إذن $2\left[(x-1)^2+3\right]$ هو الشكل النموذجي لـ $2x^2-4x+8$.

❖ نعلم أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $(x-1)^2\geq 0$ ، ومنه فإن: $2\left[(x-1)^2+3\right]\geq 6$ ،

أي: $2\left[(x-1)^2+3\right]>0$ ، ومنه فإن: $2x^2-4x+8>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

2) $3x^2+x+1=3\left(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)=3\left[\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{36}+\frac{1}{3}\right]=3\left[\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{36}\right]$.

إذن $3\left[\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{36}\right]$ هو الشكل النموذجي لـ $3x^2+x+1$.

❖ نعلم أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $\left(x+\frac{1}{6}\right)^2\geq 0$، ومنه فإن: $3\left[\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{36}\right]\geq\frac{11}{12}$،

أي: $3\left[\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{36}\right]>0$، ومنه فإن: $3x^2+x+1>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

حل التمرين 31:

1) $3x^2-4x+5=3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{9}\right]$.

❖ نعلم أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\geq 0$، ومنه فإن: $3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{9}\right]>0$، ومنه فإن

جدول الإشارة يكون كالتالي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x^2-4x+5$	$+$	

2) $2x^2-5x+2=2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]=2\left(x-\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

ومنه فإن: $2x^2-5x+2$ ينعدم من أجل: $x-2=0$ أي $x=2$، أو $x-\frac{1}{2}=0$ أي $x=\frac{1}{2}$. ومنه فإن جدول الإشارة يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$		0	$+$
$x-\frac{1}{2}$	$-$		0	$+$		$+$
$2x^2-5x+2$	$+$		0	$-$	0	$+$

3) $-4x^2+4x-1=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

ومنه فإن: $-4x^2+4x-1$ ينعدم من أجل: $x-\frac{1}{2}=0$ أي $x=\frac{1}{2}$، ومنه فإن جدول الإشارة يكون كالتالي:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-4x^2+4x-1$	$-$	0	$-$

حل التمرين 32:

1) الدالة f_1 معرفة بـ: $f_1(x)=-2(x+3)^2-1$.

❖ $f_1(x)=-2(x+3)^2-1=-2(x^2+6x+9)-1=-2x^2-12x-19$.

❖ $a=-2$، أي $a<0$، ومنه فإن التمثيل البياني للدالة f_1 هو قطع مكافئ "متجه نحو الأسفل" (1).

❖ قمته $S\left(-\frac{b}{2a};f_1\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$، أي: $S(-3;-1)$ (2).

❖ من (1) و(2) نستنتج أن: الشكل 3 هو التمثيل البياني للدالة f_1.

2) الدالة f_2 معرفة بـ: $f_2(x)=-2(x+3)^2+1$.

❖ $f_2(x)=-2(x+3)^2+1=-2(x^2+6x+9)+1=-2x^2-12x-17$.

❖ $a=-2$، أي $a<0$، ومنه فإن التمثيل البياني للدالة f_2 هو قطع مكافئ "متجه نحو الأسفل" (1).

❖ قمته $S\left(-\frac{b}{2a};f_2\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$، أي: $S(-3;1)$ (2).

❖ من (1) و(2) نستنتج أن: الشكل 2 هو التمثيل البياني للدالة f_2.

3) الدالة f_3 معرفة بـ: $f_3(x)=2(x+3)^2-1$.

❖ $f_3(x)=2(x+3)^2-1=2(x^2+6x+9)-1=2x^2+12x+17$.

❖ $a=2$، أي $a>0$، ومنه فإن التمثيل البياني للدالة f_3 هو قطع مكافئ "متجه نحو الأعلى" (1).

❖ قمته $S\left(-\frac{b}{2a};f_3\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$، أي: $S(-3;-1)$ (2).

❖ من (1) و(2) نستنتج أن: الشكل 1 هو التمثيل البياني للدالة f_3.

4) الدالة f_4 معرفة بـ: $f_4(x)=2(x+3)^2+1$.

❖ $f_4(x)=2(x+3)^2+1=2(x^2+6x+9)+1=2x^2+12x+19$.

❖ $a=2$، أي $a>0$، ومنه فإن التمثيل البياني للدالة f_4 هو قطع مكافئ "متجه نحو الأعلى" (1).

❖ قمته $S\left(-\frac{b}{2a};f_4\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$، أي: $S(-3;1)$ (2).

❖ من (1) و(2) نستنتج أن: الشكل 4 هو التمثيل البياني للدالة f_4.

Latreche MIFA

حل التمرين 33:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2(x-3)^2+4$.

(1

$$f(x)=2(x-3)^2+4=2(x^2-6x+9)+4=2x^2-12x+22$$

❖ لدينا: $f(x)=2x^2-12x+22$ مع: $a=2$ ، $b=-12$ و $c=22$ ومنه فإن:

- $-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{2\times 2}=\frac{12}{4}=3$
- $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f(3)=2\times 3^2-12\times 3+22=4$

❖ وبما أن $a>0$ فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	↘	4	↗

2) من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$(x-3)^2\geq 0\Leftrightarrow 2(x-3)^2\geq 0\Leftrightarrow 2(x-3)^2+4\geq 4\Leftrightarrow f(x)>0$$

ومنه نستنتج أن الدالة f موجبة من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

(3

❖ لدينا $-1<2$ ، وبما أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;3]$ فإنها متناقصة تماما على $[-1;2]$ ، ومنه فإن: $f(-1)>f(2)$.

❖ لدينا $4<5$ ، وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $[3;+\infty[$ فإنها متزايدة تماما على $[4;5]$ ، ومنه فإن: $f(4)<f(5)$.

❖ لدينا $-2<6$ ، و $-2\in]-\infty;3]$ ، و هو مجال تكون فيه الدالة f متناقصة تماما، و $6\in[3;+\infty[$ ، و هو مجال تكون فيه الدالة f متزايدة تماما، ومنه فإنه لا يمكن المقارنة بين $f(-2)$ و $f(6)$ بدون إجراء حسابات.

4) $\lambda\in]-\infty;3]$ معناه $\lambda-1\in]-\infty;3]$ ، وبما أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;3]$ فإن: $f(\lambda-1)>f(\lambda)$.

حل التمرين 34:

1) $f(x)=2x^2+7x+5$ مع: $a=2$، $b=7$ و $c=5$ ومنه فإن:

- $\frac{b}{2a}=\frac{7}{2\times 2}=\frac{7}{4}$
- $\Delta=7^2-4\times 2\times 5=49-40=9$
- $f(x)=2\left[\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]=2\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$

❖ إذن $2\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$ هو الشكل النموذجي لـ $2x^2+7x+5$.

- $-\frac{b}{2a}=-\frac{7}{2\times 2}=-\frac{7}{4}$
- $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f\left(-\frac{7}{4}\right)=2\left(-\frac{7}{4}\right)^2+7\left(-\frac{7}{4}\right)+5=\frac{49}{8}-\frac{49}{4}+5=\frac{49}{8}-\frac{98}{8}+\frac{40}{8}=-\frac{9}{8}$.

❖ وبما أن $a=2>0$ فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$	$-7/4$	$+\infty$
$2x^2+7x+5$	↘	$-9/8$	↗

❖ $2x^2+7x+5=2\left[\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]=2\left[\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]$

$=2\left(x+\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{7}{4}+\frac{3}{4}\right)=2(x+1)\left(x+\frac{5}{2}\right)$.

$2(x+1)\left(x+\frac{5}{2}\right)$ هو تحليل لـ $2x^2+7x+5$.

نلاحظ أن $2x^2+7x+5$ ينعدم من أجل $x=-1$ أو $x=-\frac{5}{2}$، ومنه فإن جدول إشارة $2x^2+7x+5$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$	$-5/2$	-1	$+\infty$
$x+\frac{5}{2}$	$-$	0	$+$	$+$
$x+1$	$-$		$-$ 0	$+$
$2x^2+7x+5$	$+$	0	$-$ 0	$+$

نستنتج أن:

❖ $2x^2+7x+5=0$ عندما يكون $x\in\left\{-\frac{5}{2};-1\right\}$،

❖ $2x^2+7x+5>0$ عندما يكون $x\in\left]-\infty;-\frac{5}{2}\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$،

❖ $2x^2+7x+5<0$ عندما يكون $x\in\left]-\frac{5}{2};-1\right[$.

2) $f(x)=3x^2-6x+7$ مع: $a=3$، $b=-6$ و $c=7$ ومنه فإن:

- $\frac{b}{2a}=\frac{(-6)}{2\times3}=-1$
- $\Delta=(-6)^2-4\times3\times7=36-84=-48$
- $f(x)=3\left[(x-1)^2-\frac{(-48)}{4\times3^2}\right]=3\left[(x-1)^2+\frac{12}{9}\right]=3(x-1)^2+4$.

❖ إذن $3(x-1)^2+4$ هو الشكل النموذجي لـ $3x^2-6x+7$.

- $-\frac{b}{2a}=-\frac{(-6)}{2\times3}=1$
- $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f(1)=3\times1^2-6\times1+7=3-6+7=4$.

❖ وبما أن $a=3>0$ فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$3x^2-6x+7$	↘	4	↗

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا، $(x-1)^2\geq0$ ومنه فإن: $3(x-1)^2+4\geq4$ أي: $3(x-1)^2+4>0$. ومنه نستنتج أن: $3x^2-6x+7>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

3) $f(x)=-2x^2-x+3$ مع: $a=-2$، $b=-1$ و $c=3$ ومنه فإن:

- $\frac{b}{2a}=\frac{-1}{2(-2)}=\frac{1}{4}$
- $\Delta=(-1)^2-4(-2)\times3=1+24=25$
- $f(x)=-2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]=-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$

❖ إذن $-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$ هو الشكل النموذجي لـ $-2x^2-x+3$.

- $-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2(-2)}=-\frac{1}{4}$
- $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=-2\left(-\frac{1}{4}\right)^2-\left(-\frac{1}{4}\right)+3=-2\left(\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}+3=-\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{24}{8}=\frac{25}{8}$.

❖ وبما أن $a=-2<0$ فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$	$-1/4$	$+\infty$
$-2x^2-x+3$	↗	$25/8$	↘

❖ $-2x^2-x+3=-2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]=-2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right]$

$=-2\left(x+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right)=-2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$.

$-2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$ هو تحليل لـ $-2x^2-x+3$.

نلاحظ أن $-2x^2-x+3$ ينعدم من أجل $x=1$ أو $x=-\frac{3}{2}$، ومنه فإن جدول إشارة $-2x^2-x+3$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$	$-3/2$		1	$+\infty$
$x+\frac{3}{2}$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$-2x^2-x+3$	$-$	0	$+$	0	$-$

نستنتج أن:

❖ $-2x^2-x+3=0$ عندما يكون $x\in\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$،

❖ $-2x^2-x+3>0$ عندما يكون $x\in\left]-\frac{3}{2};1\right[$،

❖ $-2x^2-x+3<0$ عندما يكون $x\in\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup]1;+\infty[$.

Latreche MIFA

4) $f(x)=x^2-2x-8$ مع: $a=1$، $b=-2$ و $c=-8$ ومنه فإن:

- $\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2\times 1}=-1$
- $\Delta=(-2)^2-4\times 1\times(-8)=4+32=36$
- $f(x)=1\left[(x-1)^2-\frac{36}{4}\right]=(x-1)^2-9$

❖ إذن $(x-1)^2-9$ هو الشكل النموذجي لـ x^2-2x-8.

- $-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times 1}=1$
- $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f(1)=1^2-2\times 1-8=1-2-8=-9.$

❖ وبما أن $a=1>0$ فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x^2-2x-8		↘	-9	↗	

❖ $x^2-2x-8=(x-1)^2-9=(x-1-3)(x-1+3)=(x-4)(x+2).$

$(x-4)(x+2)$ هو تحليل لـ x^2-2x-8.

نلاحظ أن x^2-2x-8 ينعدم من أجل $x=4$ أو $x=-2$، ومنه فإن جدول إشارة x^2-2x-8 يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x+2$	$-$		0	$+$		$+$	
$x-4$	$-$			$-$	0	$+$	
x^2-2x-8	$+$		0	$-$	0	$+$	

نستنتج أن:

❖ $x^2-2x-8=0$ عندما يكون $x\in\{-2;4\}$،

❖ $x^2-2x-8>0$ عندما يكون $x\in]-\infty;-2[\cup]4;+\infty[$،

❖ $x^2-2x-8<0$ عندما يكون $x\in]-2;4[$.

5) $f(x)=-5x^2+4x-3$ مع: $a=-5$، $b=4$ و $c=-3$ ومنه فإن:

- $\frac{b}{2a}=\frac{4}{2(-5)}=-\frac{2}{5}$
- $\Delta=4^2-4(-5)(-3)=16-60=-44$

- $f(x)=-5\left[\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{(-44)}{4(-5)^2}\right]=-5\left[\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{11}{25}\right]=-5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{11}{5}$

❖ إذن $-5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{11}{5}$ هو الشكل النموذجي لـ $-5x^2+4x-3$.

- $-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2(-5)}=\frac{2}{5}$
- $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f\left(\frac{2}{5}\right)=-5\left(\frac{2}{5}\right)^2+4\left(\frac{2}{5}\right)-3=-\frac{4}{5}+\frac{8}{5}-\frac{15}{5}=-\frac{11}{5}$.

❖ وبما أن $a=-5<0$ فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$-5x^2+4x-3$	↗	$-\frac{11}{5}$	↘

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا، $\left(x-\frac{2}{5}\right)^2\geq 0$ ومنه فإن: $-5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2\leq 0$ أي:

$-5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{11}{5}\leq-\frac{11}{5}$. ومنه نستنتج أن: $-5x^2+4x-3<0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

6) $f(x)=2x^2-4x-5$، مع: $a=2$، $b=-4$ و $c=-5$ ومنه فإن:

- $\frac{b}{2a}=\frac{-4}{2\times 2}=-1$
- $\Delta=(-4)^2-4\times 2(-5)=16+40=56$
- $f(x)=2\left[(x-1)^2-\frac{56}{4\times 2^2}\right]=2\left[(x-1)^2-\frac{7}{2}\right]=2(x-1)^2-7$

❖ إذن $2(x-1)^2-7$ هو الشكل النموذجي لـ $2x^2-4x-5$.

- $-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times 2}=1$
- $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f(1)=2\times 1^2-4\times 1-5=2-4-5=-7$.

❖ وبما أن $a=2>0$ فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$2x^2-4x-5$	↘	-7	↗

Latreche MIFA

❖ $2x^2-4x-5=2\left[(x-1)^2-\frac{7}{2}\right]=2\left(x-1-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)\left(x-1+\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.

$2\left(x-1-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)\left(x-1+\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ هو تحليل لـ $2x^2-4x-5$.

نلاحظ أن $2x^2-4x-5$ ينعدم من أجل $x=1-\sqrt{\frac{7}{2}}$ أو $x=1+\sqrt{\frac{7}{2}}$، ومنه فإن جدول إشارة $2x^2-4x-5$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{\frac{7}{2}}$		$1+\sqrt{\frac{7}{2}}$		$+\infty$
$x-1+\sqrt{\frac{7}{2}}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1-\sqrt{\frac{7}{2}}$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2-4x-5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

نستنتج أن:

❖ $2x^2-4x-5=0$ عندما يكون $x\in\left\{1-\sqrt{\frac{7}{2}};1+\sqrt{\frac{7}{2}}\right\}$،

❖ $2x^2-4x-5>0$ عندما يكون $x\in\left]-\infty;1-\sqrt{\frac{7}{2}}\right[\cup\left]1+\sqrt{\frac{7}{2}};+\infty\right[$،

❖ $2x^2-4x-5<0$ عندما يكون $x\in\left]1-\sqrt{\frac{7}{2}};1+\sqrt{\frac{7}{2}}\right[$.

حل التمرين 35:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x^2+6x-2$.

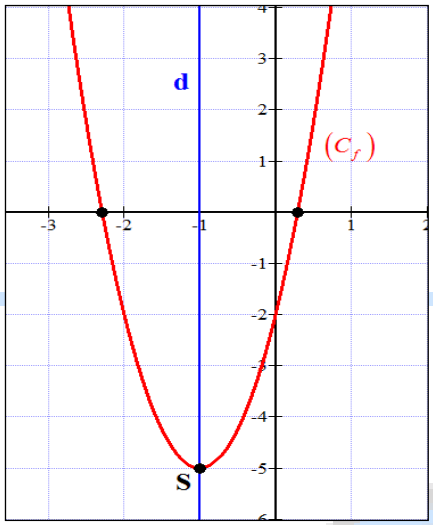
1) f كثير حدود مع: $a=3$، $b=6$ و $c=-2$. وبما أن $a=3>0$، فإن (C_f) التمثيل البياني للدالة f هو قطع مكافئ متجه نحو الأعلى، قمته هي النقطة $S(x_0;f(x_0))$ حيث:

❖ $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{6}=-1$.

❖ $f(x_0)=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f(-1)=3(-1)^2+6(-1)-2=3-6-2=-5$.

إذن قمة (C_f) هي النقطة $S(-1;-5)$.

❖ ونعلم أن (C_f) له محور تناظر هو المستقيم d الذي معادلته: $x=-1$.



❖ نستطيع رسم (C_f) بسهولة بأخذ بعض القيم الظاهرة، فمثلا:

$f(0)=-2$ و $f(1)=7$.

❖ الشكل المقابل يمثل (C_f) والمستقيم d.

2) حل المعادلة $f(x)=0$ بيانيا يعود إلى إيجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل، و من خلال الشكل المقابل نلاحظ أن هذه النقاط فواصلها على الترتيب هي: $-2,29$ و $0,29$.

ومنه فإن: مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي: $\{-2,29;2,29\}$.

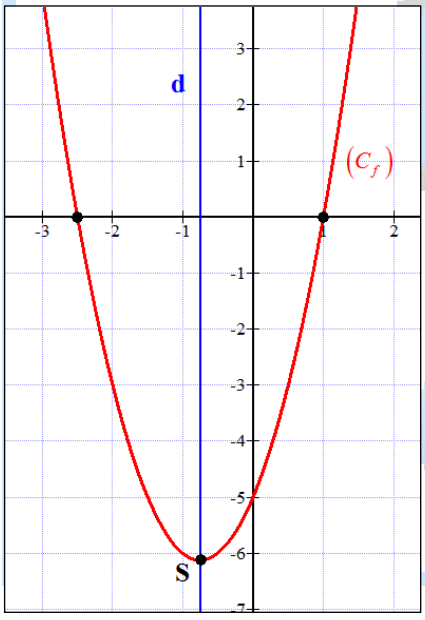
حل التمرين 36:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x^2+3x-5$.

1) f كثير حدود مع: $a=2$، $b=3$ و $c=-5$. وبما أن $a=2>0$، فإن (C_f) التمثيل البياني للدالة f هو قطع مكافئ متجه نحو الأعلى، قمته هي النقطة $S(x_0;f(x_0))$ حيث:

❖ $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{3}{4}$.

❖ $f(x_0)=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=f\left(-\dfrac{3}{4}\right)=2\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2+3\left(-\dfrac{3}{4}\right)-5=\dfrac{9}{8}-\dfrac{18}{8}-\dfrac{40}{8}=-\dfrac{49}{8}$.



إذن قمة (C_f) هي النقطة $S\left(-\dfrac{3}{4};-\dfrac{49}{8}\right)$.

❖ ونعلم أن (C_f) له محور تناظر هو المستقيم d الذي معادلته: $x=-\dfrac{3}{4}$.

❖ نستطيع رسم (C_f) بسهولة بأخذ بعض القيم الظاهرة، فمثلا:

$f(0)=-5$، $f(1)=0$، $f(-1)=-6$، $f(-2)=-3$ و $f(-3)=4$.

❖ الشكل المقابل يمثل (C_f) والمستقيم d.

2) حل المعادلة $f(x)=0$ بيانيا يعود إلى إيجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل، و من خلال الشكل المقابل نلاحظ أن هذه النقاط فواصلها على الترتيب هي: $-2,5$ و 1. ومنه فإن: مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي: $\{-2,5;1\}$.

3) حل المتراجحة $f(x) \le 0$ بيانيا يعود إلى إيجاد فواصل النقاط من (C_f) التي تنتمي أو تقع تحت محور الفواصل. ومن خلال الشكل السابق، وباستعمال حاسبة أو جهاز كمبيوتر، نلاحظ أن هذه النقاط فواصلها محصورة بين: $-2,5$ و 1. ومنه فإن: مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \le 0$ هي: المجال $[-2,5;1]$.

حل التمرين 37:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$.

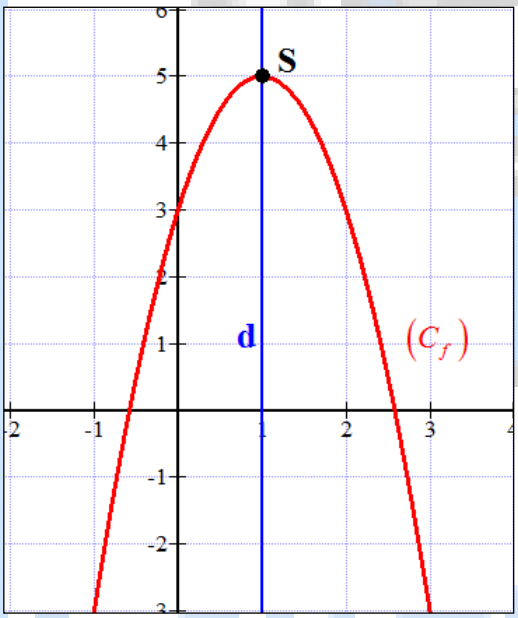
1) f كثير حدود مع: $a = -2$، $b = 4$ و $c = 3$.

- $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2(-2)} = 1$
- $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = f(1) = -2\times 1^2 + 4\times 1 + 3 = -2 + 4 + 3 = 5.$

❖ وبما أن $a = -2 < 0$ فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-2x^2 + 4x + 3$	↗	5	↘

2)



❖ بما أن $a = -2 < 0$، فإن (C_f) التمثيل البياني للدالة f هو قطع مكافئ متجه نحو الأسفل، قمته هي النقطة $S(1;5)$.

❖ ونعلم أن (C_f) له محور تناظر هو المستقيم d الذي معادلته: $x = 1$.

❖ نستطيع رسم (C_f) بسهولة بأخذ بعض القيم الظاهرة، فمثلا: $f(0) = 3$ و $f(-1) = -3$.

❖ الشكل المقابل يمثل (C_f) والمستقيم d.

Latreche MIFA

حل التمرين 38:

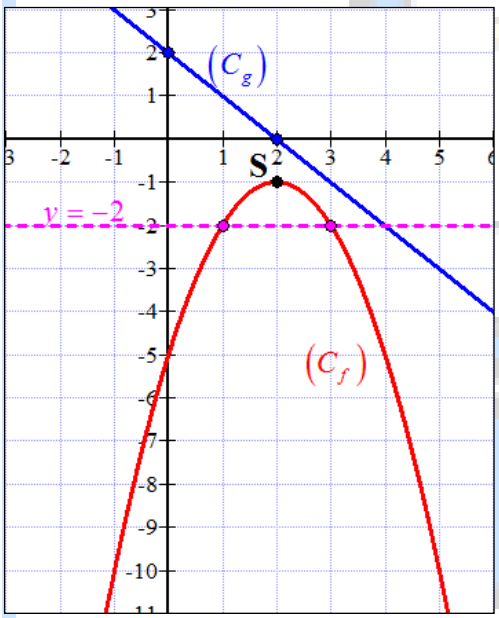
الدالتان f و g معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x^2+4x-5$ و $g(x)=2-x$.

(1

❖ f كثير حدود مع: $a=-1$، $b=4$ و $c=-5$. وبما أن $a=-1<0$، فإن (C_f) التمثيل البياني للدالة f هو قطع مكافئ متجه نحو الأسفل، قمته هي النقطة $S(x_0;f(x_0))$ حيث:

- $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4}{2(-1)}=2$.
- $f(x_0)=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=f(2)=-2^2+4\times2-5=-1$.

إذن قمة (C_f) هي النقطة $S(2;-1)$.



- ونعلم أن (C_f) له محور تناظر هو المستقيم d الذي معادلته: $x=2$.
- نستطيع رسم (C_f) بسهولة بأخذ بعض القيم الظاهرة، فمثلا: $f(0)=-5$، $f(-1)=-10$، و $f(1)=-2$.

❖ الدالة g هي دالة تآلفية، تمثيلها البياني (C_g) هو مستقيم يمكن رسمه من خلال نقطتين، وذلك بأخذ قيمتين ظاهرتين، فمثلا: $g(0)=2$ و $g(2)=0$.

❖ الشكل المقابل يمثل كلا من (C_f) و (C_g).

(2

❖ حل المتراجحة $f(x)>0$ بيانيا يعود إلى إيجاد فواصل النقاط من (C_f) التي تقع فوق محور الفواصل. ومن خلال الشكل، نلاحظ أن (C_f) يقع دائما تحت محور الفواصل. ومنه فإن: المتراجحة $f(x)>0$ ليس لها حلول.

❖ حل المتراجحة $f(x)\le-2$ بيانيا يعود إلى إيجاد فواصل النقاط من (C_f) التي تنتمي أو تقع تحت المستقيم الذي معادلته $y=-2$. ومن خلال الشكل السابق نلاحظ أن (C_f) يقع تحت المستقيم الذي معادلته $y=-2$ عندما يكون $x<1$ أو $x>3$. ومنه فإن: مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\le-2$ هي: المجال $]-\infty;1]\cup[3;+\infty[$.

❖ حل المتراجحة $f(x)\le g(x)$ بيانيا يعود إلى إيجاد فواصل النقاط من (C_f) التي تنتمي أو تقع تحت (C_g) . ومن خلال الشكل، نلاحظ أن (C_f) يقع دائما تحت (C_g). ومنه فإن: مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\le g(x)$ هي: $\mathbb{R}$.

حل التمرين 39:

الدالتان f و g معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+3x-5$ و $g(x)=-x^2+x+2$.

(1

❖ f كثير حدود مع: $a=1$، $b=3$ و $c=-5$. وبما أن $a=1>0$، فإن (C_f) التمثيل البياني للدالة f هو قطع مكافئ متجه نحو الأعلى، قمته هي النقطة $S(x_0;f(x_0))$ حيث:

- $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{3}{2(1)}=-\dfrac{3}{2}$.
- $f(x_0)=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+3\left(-\dfrac{3}{2}\right)-5=\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{2}-5=\dfrac{9-18-20}{4}=-\dfrac{29}{4}$.

إذن قمة (C_f) هي النقطة $S\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{29}{4}\right)$.

- ونعلم أن (C_f) له محور تناظر هو المستقيم d الذي معادلته: $x=-\dfrac{3}{2}$.
- نستطيع رسم (C_f) بسهولة بأخذ بعض القيم الظاهرة، فمثلا: $f(0)=-5$ ، $f(1)=-1$ ، و $f(2)=5$.

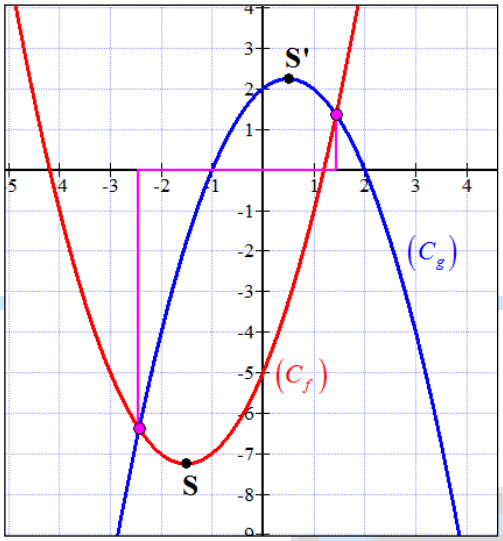
❖ g كثير حدود مع: $a=-1$، $b=1$ و $c=2$. وبما أن $a=-1<0$، فإن (C_g) التمثيل البياني للدالة g هو قطع مكافئ متجه نحو الأسفل، قمته هي النقطة $S'(x_0;g(x_0))$ حيث:

- $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{2(-1)}=\dfrac{1}{2}$.
- $g(x_0)=g\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}+2=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{-1+2+8}{4}=\dfrac{9}{4}$.

إذن قمة (C_g) هي النقطة $S'\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{4}\right)$.

- ونعلم أن (C_g) له محور تناظر هو المستقيم d' الذي معادلته: $x=\dfrac{1}{2}$.
- نستطيع رسم (C_g) بسهولة بأخذ بعض القيم الظاهرة، فمثلا: $g(0)=2$ ، $g(1)=2$ ، و $g(2)=0$.

Latreche MIFA

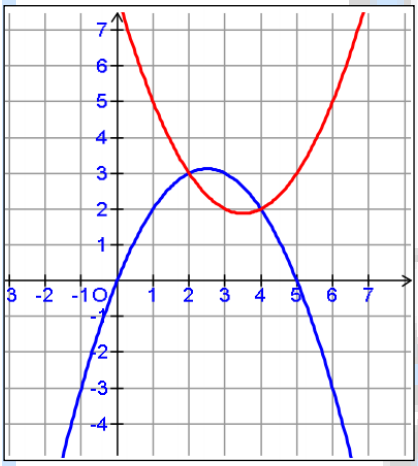


❖ الشكل المقابل يمثل كلا من (C_f) و (C_g).

2) حل المتراجحة $f(x) \le g(x)$ بيانيا يعود إلى إيجاد فواصل النقاط من (C_f) التي تنتمي أو تقع تحت (C_g).

ومن خلال الشكل، وباستعمال حاسبة أو جهاز كمبيوتر، نلاحظ أن هذه النقاط فواصلها محصورة بين: $-2,43$ و $1,44$. ومنه فإن: مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \le g(x)$ هي: المجال $[-2,43;1,44]$.

حل التمرين 40:



1)

❖ نعلم أن العامل a في f سالب، ومنه فإن (C_f) هو قطع مكافئ متجه نحو الأسفل.

❖ ونعلم أن العامل a في g موجب، ومنه فإن (C_g) هو قطع مكافئ متجه نحو الأعلى.

❖ إذن في الشكل المقابل: (C_f) ممثل باللون الأزرق و (C_g) ممثل باللون الأحمر.

2) إيجاد عبارة $f(x)$:

❖ نعلم أن 0 و 5 جذران لـ f، ومنه يمكن كتابة:

$$f(x) = a(x-0)(x-5) = ax^2 - 5ax \quad (1)$$

❖ ونعلم أن $f(1) = 2$ أي:

$$a \times 1^2 - 5a \times 1 = 2 \Leftrightarrow a - 5a = 2 \Leftrightarrow -4a = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \quad (2)$$

❖ من (1) و(2) نستنتج أن: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$.

3) إيجاد عبارة $g(x)$:

❖ g كثير حدود ومنه يمكن كتابته: $g(x) = ax^2 + bx + c$.

❖ نعلم أن g له قيمة حدية صغرى عند $\frac{7}{2}$ أي: $-\frac{b}{a}=7 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a}=\frac{7}{2}$ ومنه فإن: $b=-7a$. إذن يمكن كتابة: $g(x)=ax^2-7ax+c$.

❖ ونعلم أن f و g يتقاطعان في النقطتين $A(2;3)$ و $B(4;2)$، إذن: $g(2)=3$ و $g(4)=2$.

- $g(2)=3 \Leftrightarrow a\times 2^2-7a\times 2+c=3 \Leftrightarrow 4a-14a+c=3 \Leftrightarrow -10a+c=3 \Leftrightarrow c=3+10a$

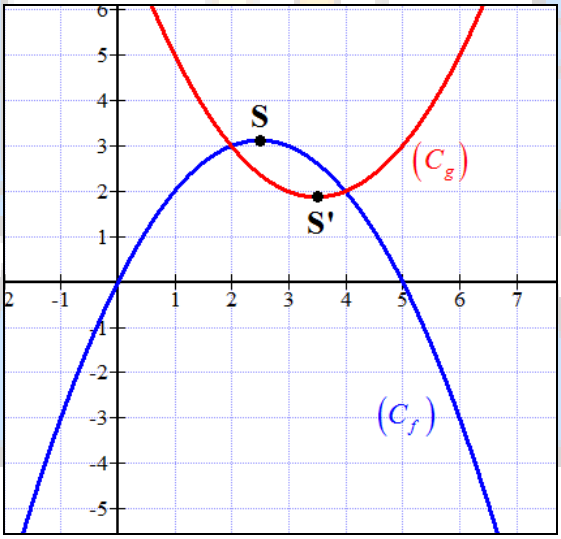
نستطيع إذن كتابة: $g(x)=ax^2-7ax+3+10a$

- $g(4)=2 \Leftrightarrow a\times 4^2-7a\times 4+3+10a=2 \Leftrightarrow 16a-28a+3+10a=2 \Leftrightarrow -2a=-1$

أي $a=\frac{1}{2}$.

ومنه فإن: $g(x)=\frac{1}{2}x^2-7\times\frac{1}{2}x+3+10\times\frac{1}{2}$ أي: $g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x+8$.

4) الشكل الموالي يمثل كلا من (C_f) و (C_g). و هو مطابق للشكل السابق، ويؤكد النتائج المتحصل عليها سابقا.



5)

❖ قمة (C_f) هي النقطة $S(x_0;f(x_0))$ حيث:

- $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{5}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{5}{2}$.

- $f(x_0)=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{25}{8}+\frac{25}{4}=\frac{-25+50}{8}=\frac{25}{8}$.

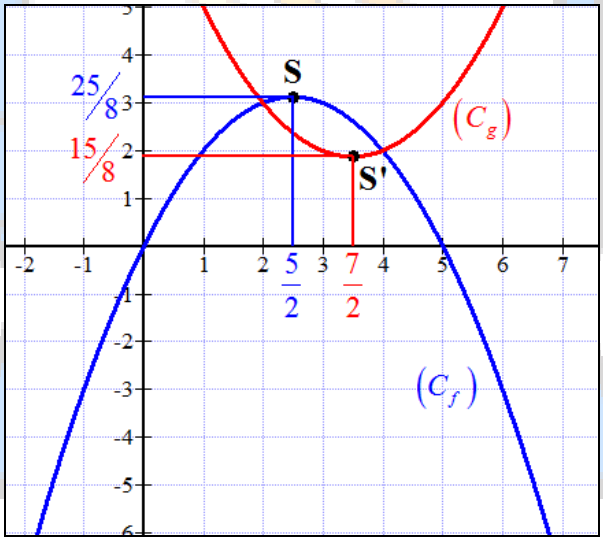
إذن قمة (C_f) هي النقطة $S\left(\frac{5}{2};\frac{25}{8}\right)$. و f لها قيمة حدية عظمى هي $\frac{25}{8}$.

❖ قمة (C_g) هي النقطة $S'(x_0;g(x_0))$ حيث:

- $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{7}{2}}{2\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{7}{2}$.
- $g(x_0)=g\left(-\frac{b}{2a}\right)=g\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\right)^2-\frac{7}{2}\left(\frac{7}{2}\right)+8=\frac{49}{8}-\frac{49}{4}+8=\frac{49-98+64}{8}=\frac{15}{8}$.

إذن قمة (C_g) هي النقطة $S'\left(\frac{7}{2};\frac{15}{8}\right)$. و g لها قيمة حدية صغرى هي $\frac{15}{8}$.

وهو ما يؤكده الشكل الموالي.



تمّ بحمد الله وتوفيقه